

## სოციალურ ჯგუფებში ფინალურ გადაწყვეტილებათა ფორმირების ალბათური მოდელირება

რეზა (ივერი) კაკუბავა,

სტუ-ს სრული პროფესორი

ნინო ყიფიანი, სტუ-ს დოქტორანტი

გიორგი მაკასარაშვილი, სტუ-ს დოქტორანტი

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

მეცნიერების სხვადასხვა დარგში – სოციოლოგიაში, ეკონომიკაში, ბიოლოგიაში არსებული მრავალი საკითხი მათემატიკური დისციპლინების გამოყენებით გადაიჭრება. ეს დარგები ერთგვარი სტიმულია ახალი, საინტერესო მათემატიკური აპარატის განვითარებისთვის, რომელიც მათემატიკური მოდელირების სახელით არის ცნობილი. სწორედ ამ თვალსაზრისით მათემატიკური მოდელირება ინტერდისციპლინარულ გამოკვლევათა გამორჩეულად მოქნილი და ნაყოფიერი ინსტრუმენტია [1, 2].

მათემატიკური მოდელირება რაიმე ობიექტის (ორიგინალის) მოდელის შექმნას და შესწავლას წარმოადგენს ერთმანეთთან დაკავშირებული წესების, განსაზღვრებების და მეთოდების გამოყენებით. მისი ძირითადი მიზანია: ა) ორიგინალის საინტერესო თვისებები საკმარისი სიზუსტით აღწეროს, ბ) პროგნოზი დროის მცირე დანახარჯებით გააკეთოს, გ) მოდელის შედეგების ორიგინალზე გადატანის საშუალება მოგვცეს.

მათემატიკური მოდელები შეიძლება იყოს დეტერმინისტული, ალბათური და სხვ. ალბათურ მოდელებს ზოგჯერ სტოქასტურს უწოდებენ.

დეტერმინისტული მოდელები ზუსტ პროგნოზს იძლევა; ალბათური – პროგნოზს იმის შესახებ, რომ ხდომილობა დროის გარკვეულ მონაკვეთში განსაზღვრული ალბათობით ხდება. ამასთან, ალბათური მოდელი პროცესის პარამეტრების საშუალო მნიშვნელობებისთვის პრაქტიკულად მისაღებ პროგნოზს იძლევა. სოციალური სისტემების ალბათურ მოდელებში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს მარკოვის ჯაჭვების თეორიას და გრაფთა თეორიას [1,3,4].

ამის ილუსტრაციას ქვემოთ შემოგთავაზებთ. ჩვენ დავეყრდნობით ცნობილი ავტორების გამოკვლევებს და, ჩვენეული ხედვის გათვალისწინებით, მათ თავისებურ სინთეზს მოვასწავებთ.

### მოსამზადებელი საკითხები

როგორც აღვნიშნეთ, ნაშრომში არსებითად არის გამოყენებული მარკოვის ჯაჭვების და გრაფთა თეორიები, ამიტომ ამ პარაგრაფში ამ საკითხებზე მოკლედ შევჩერდებით [5].

მარკოვის ჯაჭვი არის ისეთი სტოქასტური პროცესი, რომლის მდგომარეობათა სიმრავლე, ასევე დრო, დისკრეტულია. ამასთან დროის  $t+1$  მომენტში პროცესის რაიმე მდგომარეობაში ყოფნის ალბათობა დამოკიდებულია მხოლოდ იმაზე, თუ რა მდგომარეობაში

იმყოფებოდა პროცესი დროის  $t$  მომენტში, და არ არის დამოკიდებული პროცესის მდგომარეობებზე დროის წინა მომენტებში. ეს დამოკიდებულება  $t$ -ს მიმართ ინვარიანტულია.

ჩვენ განვიხილავთ მარკოვის ჯაჭვს მდგომარეობათა სასრული სიმრავლით. მდგომარეობათა ყოველ  $i$  და  $j$ -ურ წყვილს  $p_{ij}$  რიცხვი შეესაბამება. იგი წარმოადგენს ალბათობას იმისა, რომ თუ დროის რომელიმე მომენტში ჯაჭვი  $ui$ -ურ მდგომარეობაში იყო, მომდევნო მომენტში  $uj$ -ურ მდგომარეობაში გადავა. ამ რიცხვს მარკოვის ჯაჭვების გადასვლითი ალბათობა ეწოდება. გადასვლითი ალბათობების ერთობლიობა მატრიცას სახით წარმოიდგინება:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n} \quad (1).$$

$P$  მატრიცას ყოველი ვექტორი არაუარყოფითი რიცხვებისგან შედგება, რომელთა ჯამი 1-ის ტოლია. მათ ალბათური ვექტორები ეწოდება. ალბათური ვექტორებისგან შემდგარ მატრიცას – **სტოქასტური მატრიცა**.

მარკოვის ჯაჭვების ყოველ სტოქასტურ მატრიცას შეწონილი ორგრაფი (ორიენტირებული გრაფი) შეესაბამება. **გრაფი** არის ფიგურა, რომელიც წერტილების (წვეროების) და მათი შემაერთებელი წილებისგან (წიბოებისგან) შედგება. შესაძლებელია, შეერთებული იყოს მოცემულ წვეროთა ყოველი წყვილი, ან, მხოლოდ მათი ნაწილი, ან რაიმე წვერო – თავის თავთან; რაიმე ორი წვერო შეიძლება რამდენიმე წიბოთი იყოს შეერთებული. წვეროების საშუალებით სხვადასხვა დანიშნულების ელემენტებს გამოსახავენ, წიბოებით კი მათი ურთიერთკავშირი გამოისახება [1].

გრაფი შეიძლება იყოს **ორიენტირებული**, ანუ, მის თითოეულ წიბოზე მითითებული იყოს საწყისი და ბოლო წვეროები. ასეთ გრაფს **ორგრაფი** ეწოდება.

შესაძლოა ორგრაფს მარყუჟი ჰქონდეს. მარყუჟი არის წვერო, რომელიც თავის თავთან არის შეერთებული.

სოციოლოგიური ამოცანების გადაჭრისას **შეწონილი ორგრაფები** გამოიყენება. წონა ნამდვილი რიცხვით გამოისახება, წიბოზე იწერება და ერთი ელემენტის მეორეზე ზემოქმედებას აღნიშნავს. ორგრაფი

მჭიდროდ ბმულია თუ მისი ყველა ელემენტი ერთმანეთზე ზემოქმედებს (შესაძლოა არაპირდაპირაც). არსებობს ორგრაფები, რომლებიც მჭიდროდ ბმული არ არის, მაგრამ ასეთი სახის ქვესიმრავლეებს შეიცავს. მათ **ძლიერი კომპონენტები** ეწოდება. ორგრაფის წიბოების მიმართულების შეცვლით შექცეული ორგრაფი მიიღება. თუ გრაფი  $D$  ასოთი გვაქვს აღნიშნული, მისი შექცეული ორგრაფი  $C(D)$  ასოთი აღინიშნება. შექცევის დროს ზოგი ძლიერი კომპონენტი ერგოდიულ სიმრავლეს ქმნის, ზოგი – არამდგრად სიმრავლეს. **ერგოდიული** ჩაკეტილ სიმრავლეს აღნიშნავს, რომლის არცერთი ქვესიმრავლე ჩაკეტილი არ არის. თუ მარკოვის ჯაჭვი ერგოდიულ სიმრავლეში მოხვდა, მას აღარასოდეს აღარ დატოვებს. საკმარისია მოცემული ერგოდიული სიმრავლის ყველა მდგომარეობა გავაერთიანოთ და იგი ერთ შთანთქმად მდგომარეობად განვიხილოთ. ასეთ შემთხვევაში ერგოდიული სიმრავლე ერთი ელემენტისგან შედგება და მარკოვის ჯაჭვს **შთანთქმადი ჯაჭვი** ეწოდება (ან ჯაჭვი შთანთქმადი მდგომარეობებით).

ზოგი ერგოდიული მარკოვის ჯაჭვი **რეგულარულიც არის**. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი მდგომარეობიდან სხვა მდგომარეობაში გადასვლა ზუსტად  $k$  ბიჯის შედეგად ხდება.

#### ძირითადი ნაწილი

მარკოვის ჯაჭვების თეორია და გრაფთა თეორია ისეთ სოციალურ ამოცანებში გამოიყენება, სადაც ჯგუფური გადაწყვეტილების ფორმირება ხდება. მსგავსი ტიპის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება და ძირითადი შედეგები ფრენჩს (French, [1956]) და ჰარარის (Harary [1959]) ეკუთვნის [6,7].

განვიხილება  $n$  წევრისგან შემდგარი ჯგუფი. ჯგუფის თითოეული წევრი გაიგივებულია რაიმე ნატურალურ რიცხვთან. განსაზღვრულ საკითხთან დაკავშირებით ჯგუფის წევრებმა ერთობლივი გადაწყვეტილება უნდა მიიღონ.  $t=0$  საწყის მომენტში ჯგუფის ყველა წევრს გარკვეული შეხედულება აქვს.  $uk$  წევრის შეხედულება  $a_k$  ნამდვილი რიცხვით გამოისახება. ჯგუფის თითოეული წევრი სხვა წევრზე ზეგავლენას ახდენს.  $a_{ij}$  არაუარყოფითი რიცხვი  $ui$ -ური წევრის  $uj$  წევრზე ზემოქმედებას გამოისახავს. მიჩნეულია, რომ

$$\sum_{i=1}^n \alpha_j = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \dots + \alpha_{nj} = 1 \quad (2).$$

ჯგუფის წევრების ურთიერთზემოქმედება  $D$  ორგრაფის საშუალებით გამოისახება.  $D$  ორგრაფის წევრობებს ჯგუფის წევრები:  $u1, u2, \dots, un$  წარმოადგენს. თუ  $\alpha_j \neq 0$   $ui$ -დან  $uj$ -სკენ წიბოა გავლებული შესაბამისი  $\alpha_j$  წონით. დაშვებულია, რომ  $D$  ზემოქმედების ორგრაფი გადაწყვეტილების მიღების პროცესში უცვლელია. აზრის გამოთქმა და გადაწყვეტილების მიღება დროის დისკრეტულ მომენტებში  $t$

$= 1, 2, \dots$  ხდება.  $t+1$  მომენტში ჯგუფის  $uj$  წევრის შეხედულება შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^n \alpha_j a_i(t). \quad (3)$$

მოდელის მიზანია, შემდეგ კითხვებს უპასუხოს:

1) ღებულობს თუ არა ჯგუფის თითოეული წევრი საბოლოო (ფინალური) გადაწყვეტილებას?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = a_i^*$$

2) არსებობს თუ არა საერთო ჯგუფური ფინალური გადაწყვეტილება?

მოდელი არ გამორიცხავს, რომ ფინალური გადაწყვეტილების მისაღებად საკმარისად დიდი დროა საჭირო. რეალურ შემთხვევებში, თუ ჯგუფური აზრი ჩამოყალიბდა, ის თეორიული ზღვართი მნიშვნელობიდან გარკვეულწილად დაცილებულია.

მოდელის გამოსაკვლევად  $D$  შეწონილი ორგრაფის შექცეული  $C(D)$  ორგრაფი განვიხილოთ.  $C(D)$  შეიცავს  $(ui, uj)$  რკალს  $p_{ij}$  წონით, რომელიც  $\alpha_{ji}$ -ის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა  $D$  შეიცავს  $(uj, ui)$  რკალს  $\alpha_{ji}$  წონით. შექცევის დროს რკალის მიმართულებები (მარყუქების გარდა) საპირისპიროდ იცვლება.

თუ  $D$  რომელიმე სოციალური ჯგუფის ზეგავლენის ორგრაფია, მაშინ (2) ფორმულის გათვალისწინებით მისი შექცეული  $C(D)$  ორგრაფი სტოქასტური იქნება. მას ზემოთ მოცემული (1) სტოქასტური მატრიცა შეესაბამება.

ფრენჩის და ჰარარის მოსაზრება, რომ ზოგიერთი  $\alpha_{ii} > 0$ , რაც ნიშნავს, რომ ზოგი წევრი საკუთარ თავზეც ახდენს ზეგავლენას, ფინალური გადაწყვეტილების მისაღწევად მნიშვნელოვანია [2].

მოცემულ სიტუაციას მარკოვის ჯაჭვების თეორიის

თეორემები კარგად ესადაგება. ვთქვათ,  $(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \dots \\ a_n(t) \end{pmatrix}$

არის  $t$  მომენტში ჯგუფის წევრების შეხედულებების ვექტორი.  $P$  - ზემოთ მოცემული სტოქასტური მატრიცა. (2) პირობა ამტკიცებს, რომ

$$A(t+1) = P \cdot A(t) = P P^t \cdot A(0) = P^{t+1} A(0). \quad (4)$$

$$\text{შესაბამისად } A(t) = P^t A(0).$$

**თეორემა 1.** თუ სოციალური ჯგუფის ზეგავლენის  $D$  ორგრაფი მჭიდროდ ბმულია და ერთ მარყუქს მაინც შეიცავს, ჯგუფის წევრები საერთო ფინალურ გადაწყვეტილებას იღებენ. ჯგუფური გადაწყვეტილება ტოლია:

$$\sum_{i=1}^n w_i a_i(0).$$

$W_i$  - შექცეული ორგრაფის შესაბამისი მარკოვის ჯაჭვის მატრიცის სტაციონალური წერტილის შესაბამისი ალბათური ვექტორის  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ -ის

კომპონენტია.

$ai(0)$  – საწყის მომენტში  $i$ -ური წევრის შეხედულება.

ფორმულა წარმოადგენს ჯგუფის წევრების საწყისი შეხედულებების საშუალო შეწონილ მნიშვნელობას.

**დამტკიცება:**  $D$  ორგანიზაციის მჭიდროდ ბმულია, აქედან გამომდინარეობს, რომ  $C(D)$  მჭიდროდ ბმულია.  $C(D)$  ერგოდიულ ჯგუფს განსაზღვრავს. რადგან ზოგიერთი  $p_j \neq 0$ , ეს ჯგუფი რეგულარულიც არის. რეგულარულ მარკოვის ჯგუფებზე თეორემის თანახმად

$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = W$ .  $W$  მატრიცას ყველა სტრიქონი ერთი და იგივე  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  ვექტორია. (4) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი  $j$ -სათვის

$$a_j(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n w_i \cdot a_i(0) \quad (5).$$

მაშასადამე ჯგუფის ყოველი წევრის შეხედულება  $ai(t)$  ერთი და იმავე ფინალური გადაწყვეტილებისაკენ მიისწრაფის. **თეორემა დამტკიცებულია.**

ანალოგიური მსჯელობების საფუძველზე მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 2.** თუ სოციალური ჯგუფის ყველა წევრი ერთმანეთზე ზემოქმედებს და ყოველ ძლიერ ქვეჯგუფში ერთი წევრი მაინც საკუთარ თავზე ახდენს ზეგავლენას, სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1) ჯგუფის ყოველი წევრი მდგრად ფინალურ გადაწყვეტილებამდე მიდის. იგი მხოლოდ ძლიერი ქვეჯგუფების წევრების საწყის შეხედულებებზეა დამოკიდებული.

2) თუ სოციალურ ჯგუფში ერთი ძლიერი ქვეჯგუფია, მთელი ჯგუფი საერთო ფინალურ გადაწყვეტილებას იღებს. იგი ძლიერი ქვეჯგუფის ფინალური გადაწყვეტილების ტოლია და მისი წევრების საწყის შეხედულებებზეა დამოკიდებული.

3) თუ რამდენიმე ძლიერი ქვეჯგუფია, თითოეული მათგანი ფინალურ გადაწყვეტილებამდე მიდის. როცა ისინი ერთნაირია, მთელი ჯგუფი საერთო ფინალურ გადაწყვეტილებას ღებულობს. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ ძლიერი ქვეჯგუფების წევრების საწყის შეხედულებებზე [2,3,4].

მარკოვის ჯგუფების თეორიის გამოყენებით და ზეგავლენის გრაფის გარკვეული გარდაქმნების შედეგად შესაძლებელი აღმოჩნდა იმის დადგენა, რომ ჯგუფი საერთო ფინალურ გადაწყვეტილებას აღწევს. გარდა ამისა მტკიცდება, რომ თითოეული წევრის შეფარდებითი ზეგავლენა გარკვეული რიცხვით გამოისახება, რაც განსაზღვრულია მისი წვლილით ფინალური გადაწყვეტილების მიღწევაში. ყველაზე საინტერესო ის არის, რომ ამოცანებში, რომლებიც თავისი ბუნებით სრულიად არ არის ალბათური, მარკოვის ჯგუფების თეორიის მეთოდები ძალიან ეფექტურია. ვვარაუდობთ,

რომ მომავალი კვლევები გვიჩვენებს, რამდენად ეფექტურია მარკოვის ჯგუფებისა და გრაფების თეორიის გამოყენება სხვა ტიპის სოციალური სისტემების გამოსაკვლევად.

*Revaz (Iveri) Kakubava,*

*Nino Kipiani*

*George Makasarashvili*

## PROBABILISTIC MODELING OF FORMATION OF THE FINAL DECISIONS IN SOCIAL GROUPS

### SUMMARY

The work considers the problems of influence and authority in social groups. Particularly, the process of formation of the final decisions within multi-member social group and aspects of evolution of this process. On the basis of Markov chains and graph theory the following problems are researched: 1) How does each member of the group make the sustainable final decision? 2) In what conditions does the whole group or its distinct subgroup make the sustainable final decision? 3) What is the relationship between the group's final decision (if it's possible) and the initial considerations of members of the group?

### ლიტერატურა:

1. გ. ბელთაძე, კ. მელაძე, ნ. სხირტლაძე. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის საფუძვლები და მათი გამოყენება საზოგადოებრივ მეცნიერებაში. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2003.
2. Roberts F.S. Mathematical models with application to social, biological and environmental problems, Rutgers University Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
3. Eric Sigward. Introduction a la theory des graphes dans la sociologie. E. Sigward a ac-nansy metr. Fr, 2009.
4. Bharucha-Reid A.T. Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications. Mc Craw-Hill Book Company, New York, 1960.
5. Кемени Дж. Снел Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука 1970.
6. French J.R.P. Jr. A Formal Theory of Social Power. Psychol. Rev., 63, 1956.
7. Harary F. A Criterion for Unanimity in Frenchs Theory of Social Power, in Studies in Social Power. D. Cartwright (ed)., Inst. Soc. Rec., Ann Arbor, Mich., 1959.