

მაკრომიკრო პროცესების მოდელირება

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОЦЕНОК ПСЕВДОСПЕКТРОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Бузаладзе А.З., Мачарадзе Т.Д., Мильников А.А.
Грузинский Технический Университет

რეზიუმე

განხილულია მხოლოდ პერიოდული დეტერმინირებული კომპონენტების შემცველი დროითი მწკრივების ფსევდოსპექტრების შეფასებისას მათი სპექტრული გარჩევადობის ამაღლების მეთოდი. შემოთავაზებული მეთოდის არსი მდგომარეობს საწყისი მწკრივის შეცვლაში ისეთი ახალი მწკრივით, რომელიც აგებულია საწყისი მწკრივის მონაცემთა მატრიცის ორივე ტიპის სინგულარული ვექტორების გაერთიანების გზით. შემოტანილია სინგულარული განშლის დროის ცნება და ნაჩვენებია, რომ ახალ მწკრივს, საწყის მწკრივთან შედარებით, სინგულარული განშლის გაცილებით დიდი დრო აქვს. შემოთავაზებული მეთოდი საშუალებას იძლევა ფსევდოსპექტრების შეფასებისას საგრძნობლად ავამაღლოთ სპექტრული გარჩევადობა. მიღებული შედეგები დასაბუთებულია კონკრეტულ რიცხვით მაგალითებზე დაყრდნობით.

საკვანძო სიტყვები: დროითი მწკრივი, მონაცემთა მატრიცა, სინგულარული დეკომპოზიცია, ფსევდოსპექტრი, სპექტრული გარჩევადობა, სინგულარული განშლა.

Summary

Resolution capacity of pseudospectra
estimate of the time series with deterministic
periodic components

Method of estimating of pseudospectra of the time series containing only deterministic periodic components and improving its pseudospectral resolution capacity is discussed. The essence of the methods consists in the substitution initial time series with the new one constructed as a unification of both type of singular vectors of the initial time series data matrix. A notion of the time of singular sweep is introduced and it is shown that the new time series possesses considerably bigger time of singular sweep. The suggested method allows increasing of resolution capacity of pseudospectra estimate. The all results are illustrated with concrete numerical examples.

Key words: time series, data matrix, singular decomposition, pseudospectrum, resolution capacity, singular sweep.

Резюме

Рассматривается метод оценки псевдоспектров временных рядов, содержащих только периодические детерминированные компоненты, и улучшения их псевдоспектральной разрешающей способности. Сущность предложенного метода заключается в замене исходного временного ряда новым, построенным при помощи объединения обоих типов сингулярных векторов матрицы данных исходного ряда. Введено понятие “времени сингулярной развертки” и показано, что новый ряд обладает значительно большим временем сингулярной развертки. Предложенный метод позволяет значительно увеличить разрешающую способность оценки псевдоспектра. Все результаты подтверждены при помощи конкретных численных примеров, реализованных средствами пакета прикладных программ MatLab.

Ключевые слова: временной ряд, матрица данных, сингулярные разложения, псевдоспектр, разрешающая способность, сингулярная развертка.

1. Введение

Анализ, моделирование и прогнозирование временных рядов является одной из наиболее актуальных задач, имеющей многочисленные приложения во всех областях науки, техники, экономики и финансов, то есть везде, где требуется анализ экспериментальных данных и принятие решений на их основе [1,2].

Проблема оценки псевдоспектров возникает при анализе и моделировании временных рядов, содержащих детерминированные периодические компоненты (в общем случае комплексные), вида

$$x(t) = \sum_{j=1}^m A_j e^{(2\pi f_j t + \theta_j)i}, \quad (1)$$

где A_j – амплитуда j -ой периодической компоненты;
 f_j – её частота;

m – число периодических компонент;

θ_j – фазы периодических компонент, являющиеся детерминированными постоянными.

Благодаря присутствию детерминированных периодических компонент временные ряды (1) не являются стационарными. К временным рядам подобного типа не может быть применено преобразование Фурье, корректное использование которого требует, во-первых стационарности, а во-вторых бесконечно большого интервала времени. Именно в этой связи возникает задача по оценке зависимости мощности рядов (1) от частоты, которая называется псевдоспектром [1]. Адекватная оценка псевдоспектра позволяет оценить главные параметры рядов вида (1): 1) число периодических компонент- m ; 2) частоту каждой компоненты f_j ($j=1,2,\dots,m$); 3) амплитуду (мощность) каждой компоненты A_j ($j=1,2,\dots,m$). При этом, как и в случае с оценкой спектров стационарных временных рядов, возникает задача разделения близких по частоте периодических компонент, то есть проблема разрешающей способности полученной псевдоспектральной (в случае стационарного характера ряда – спектральной) оценки.

Вполне очевидно, что практическая ценность полученной спектральной оценки во многом определяется именно её разрешающей способностью, так возможность отделить периодические компоненты составляет, по-существу, основную цель любого метода псевдоспектрального (спектрального) оценивания.

Данная работа посвящена изложению разработанного метода по увеличению разрешающей способности псевдоспектральных оценок временных рядов.

2. Основная часть

2.1. Теоретические основания метода.

Подробно содержание предлагаемого метода изложено в работах [3],[4],[5] здесь же представлена лишь краткая информация.

Пусть дано N отсчетов временного ряда $x[1], x[2], \dots, x[N]$. Его матрица данных определяется следующим образом [1]

$$X_d = \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & x[p] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[p+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[N-p] & x[N-p+1] & \dots & x[N] \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Очевидно, что это – прямоугольная $p \times l$ матрица,

где $0 < p < N$ и $l = N - p + 1$.

Известно, что используя разложение по сингулярным значениям, X_d можно представить при помощи низкоранговой тензорной аппроксимации [1],[3]

$$X_d = \sum_{i=1}^q \lambda_i (u_i \otimes v_i) \quad (3)$$

где $\otimes$ – знак тензорного умножения;

q – число членов аппроксимации ($q \leq \min(l, p)$);

r ($r \leq \min(p, l)$) – ранг X_d ;

λ_i – сингулярные значения X_d ;

u_i и v_i – соответственно левый и правый сингулярные векторы X_d .

В рассматриваемом случае, то есть в случае, когда ряд содержит только лишь детерминированные периодические компоненты, ранг матрицы данных r будет равен числу периодических компонент m . Заметим, что в случае действительных рядов ранг матрицы данных будет равен удвоенному числу компонент. Поэтому, если $q = 2m = r$, то представление (3) является точным, то есть ряд (1), при помощи (3), восстанавливается без погрешностей. Однако, при анализе ряда с заранее неизвестным числом детерминированных компонент, обычно $q = \min(p, l) > r$, поэтому среди всех сингулярных значений матрицы X_d (их число равно $\min(p, l)$) имеется $\min(p, l) - r$ – кратных нулевых значений.

В работах [4,5] доказаны важные, для дальнейшего изложения, предложения, доказательства которых мы опускаем.

Предложение 1. Все $2m$ сингулярных векторов, соответствующих ненулевым сингулярным значениям (левых и правых) матрицы данных X_d , построенной по данным ряда вида (5), являются линейными комбинациями векторов наблюдений его периодических компонент. Напомним, что полное число левых сингулярных векторов равно l , а правых – p .

Там же вводится следующее определение:

Будем говорить, что два временных ряда имеют одинаковую псевдоспектральную структуру, если в их псевдоспектрах мощности пики достигаются на одинаковых частотах, но при этом величины пиков могут быть различными (при равной величине пиков, можно говорить о равенстве псевдоспектров).

Как следствие последнего определения и Предложения 1, получаем второе предложение.

Предложение 2. Все $2m$ сингулярных векторов, соответствующих ненулевым сингулярным значениям (левых и правых) матрицы данных X_d , построенной по данным ряда вида (5), имеют одинаковую псевдоспектральную структуру, и их псевдоспектральная структура идентична

псевдоспектральной структуре исходного ряда.

2.2. Разрешающая способность псевдоспектрального оценивания

Разрешающая способность является основной качественной характеристикой любого метода спектрального оценивания. Под ней понимается способность разрешать (раздельно измерять) спектральные отклики двух синусоидальных сигналов, близких по частоте и амплитуде. Обычно полагают, что разнесение частот двух синусоид не может быть меньше эквивалентной ширины полосы частот B_e спектра окна, через которое наблюдаются отрезки этих синусоид [1]. Поскольку известно, что

для детерминированных сигналов $B_e T_o \approx 1$, где T_o – время наблюдения временного ряда в секундах, то принимают, что разрешение в герцах Δf приближенно равно величине, обратной T_o [1]. Увеличение частоты отсчётов не приводит к улучшению разрешающей способности. Это представляется естественным, так как, если частота отсчетов f_s удовлетворяет критерию Найквиста, то есть, если $f_s > 2f_{\max}$ (где $f_{\max}$ – верхняя частота спектра сигнала), то сигнал восстанавливается без потерь. Поэтому, увеличение f_s не приводит к увеличению информации, содержащейся в сигнале, в то время как увеличение времени наблюдения приводит к её увеличению. Принимается, что два пика, соответствующих двум детерминированным периодическим компонентам, разделены, если “провал” между ними не меньше 3 дБ. Из последнего требования и определения децибела следует, что в качестве критерия разделённости следует использовать следующее соотношение (его можно назвать “коэффициентом отделимости”)

$$S(f) = \frac{P(f_j)}{P(f_i)} \geq 0.3 \quad (i \neq j) \quad (4)$$

где $P(f_j)$ – величина меньшего, из двух сравниваемых пиков на частоте f_j ;

$P(f_i)$ – величина “провала” на частоте f_i .

Так как, по доказанному, все сингулярные векторы имеют равные псевдоспектры, с псевдоспектральной структурой, подобной псевдоспектральной структуре исходного ряда, то для оценок частот периодических составляющих, можно использовать ряды, составленные из объединения сингулярных векторов. Если интервал времени между двумя соседними отсчетами равен $t_s = 1/f_s$, то время наблюдения исходного ряда $T_o = N \cdot t_s$. Для нового ряда, построенного по сингулярным векторам матрицы данных, величина t_s не меняется, в то время как число отсчетов увеличивается.

Ортогональная матрица левых U сингулярных векторов ($i=1,2,\dots, N-p+1$) в общем случае является

квадратной порядка $N-p+1$, а ортогональная матрица V правых сингулярных векторов ($i=1,2,\dots,p$) – порядка p . В рассматриваемом нами случае, когда отсутствуют случайные составляющие и $\min(p,l) > r$, $(N-p+1)$ -г левых векторов u_i и p -г правых векторов v_i соответствуют нулевым сингулярным значениям, и, тем самым, они не вносят вклад в разложение (3). Поэтому можно принять, что в общем случае в формировании исходного временного ряда участвуют только лишь r левых и r правых сингулярных векторов. Исходя из этого, суммарное число компонент (отсчётов) векторов u_i , соответствующих $2r$ ненулевым собственным значениям, равно $(N-p+1)r$, а общее число компонент (отсчётов) векторов v_i , также соответствующих r ненулевым собственным значениям, равно pr . Общее число отсчётов, временного ряда, являющегося объединением сингулярных векторов обоих типов, соответствующих ненулевым собственным значениям, будет равно $r(N+1)$.

Теперь мы можем ввести временной параметр $T_s = r(N+1)t_s$, который не является физическим временем наблюдения и которое, для действительных рядов, в $2m$ раз больше физического времени наблюдения (точнее в $r+1/N=2m+1/N$, но, при больших N , последним слагаемым можно пренебречь). Назовём эту величину временем сингулярной развёртки данного ряда. Очевидно, что величина спектрального разрешения любого метода спектрального оценивания, реализованного на ряде, состоящем из объединённых сингулярных векторов, увеличивается в m раз. Подчёркнём, что полученный результат справедлив для любого метода спектрального оценивания.

2.3. Примеры сравнительных оценок разрешающей способности, полученных при помощи низкоранговой аппроксимации матрицы данных

В данном разделе рассматривается временной ряд, составленный из двух периодических компонент

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) \quad (5)$$

Шаг квантования $t_s = 0.01$. Амплитуды A_1 и A_2 приняты равными 40 и 30 единицам, соответственно. Число замеров $N=294$, и, тем самым, $T_o = Nf_s = 2.93$ сек. Отсюда частота разрешения $\Delta f = 1/T_o = 0.34$ Гц. Рассмотрим два случая оценивания: 1) разность частот $\Delta f = f_1 - f_2 > f_r$; 2) разность частот $\Delta f = f_1 - f_2 < f_r$.

1) Разность частот $\Delta f = f_1 - f_2 > f_r$. На рис.1 представлен исследуемый ряд, построенный для вышеуказанных параметров и для частот $f_1 = 0.5$ Гц, и $f_2 = 0.55$ Гц, то есть, несмотря на близость частот, их разность удовлетворяет условию разделимости

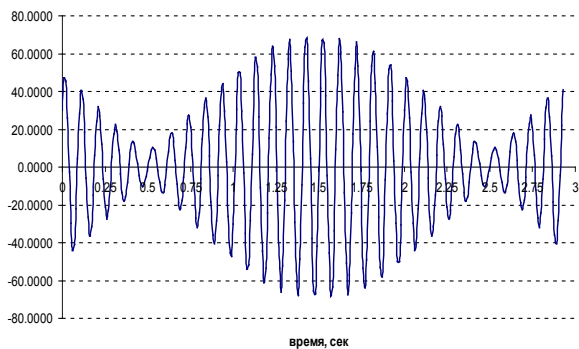


Рис. 1 Временной ряд (5): амплитуды - $A_1=40$, $A_2=30$; частоты - $f_s=100$ Гц, $f_r=0.34$ Гц, $f_1=0$ и $f_2=0.5$ Гц; время наблюдения $T_0=2.93$ сек.

Данный ряд был обработан при помощи метода MUSIC (Multiple Signal Classification method), специально предназначенного для оценок псевдоспектров [1]. Обработка была проведена в системе MatLab, была использована функция $[S,f]=pmusic(x,r,f,fs)$, где x – временной ряд, $m=r/2$ – число периодических компонент, f – диапазон частот, fs – частота отсчетов. Функция возвращает псевдоспектр S и соответствующий диапазон частот f , что позволяет представить графическую картину псевдоспектра. Отметим, что метод требует предварительной, хотя бы и грубой, оценки числа периодических компонент m , что нельзя не отнести к недостаткам данного метода.

Для конкретного ряда (5) и указанных выше параметров, вызов функции выглядел следующим образом

```
[S,f] = pmusic(x,4,[],100);
hps = dspdata.pseudospectrum(S,'Fs',100);
figure; plot(hps);
```

На рис.2 представлена оценка псевдоспектра указанного ряда, откуда следует, что

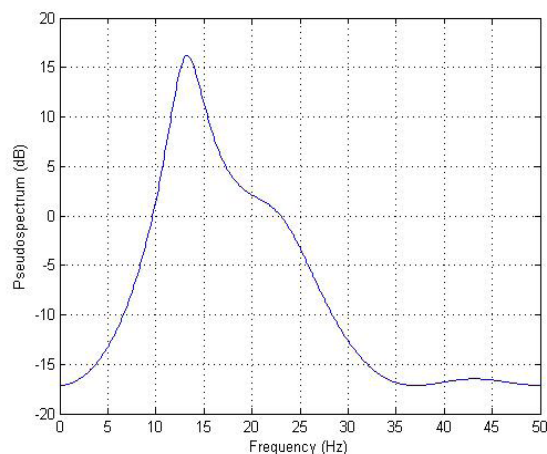


Рис.2 Оценка псевдоспектра ряда (5) по методу MUSIC ($f_1=0$ и $f_2=0.5$ Гц.)
разделение периодических составляющих не

удалось, несмотря на то, что интервал частот между компонентами удовлетворял условию разрешимости по частоте. Анеалогичная ситуация возникает и при попытке оценить псевдоспектр данного ряда при помощи построения периодограммы, т.е. при помощи оценки спектра мощности. С этой целью была использована функция $[Pxx,f] = periodogram(x>window,f,fs)$, где x – вектор данных исследуемого ряда; $window$ – вектор специфицирующий окно (прямоугольное по умолчанию); f – вектор частот и fs – частота выборки. В рассматриваемом случае имеем следующую обращение $[Pxx,f] = periodogram(B,[],[],100); figure; plot(f,Pxx)$.

На рис. 3 изображена оценка псевдоспектра, построенная при помощи данной функции.

Очевидно, что данный метод показывает чуть лучший результат, чем метод MUSIC, однако добиться разделения частот все-таки не удастся, так как провал между ними не удовлетворяет условию их разделения (4):

$$S(f) = 1.6 < 0^{0.3}$$

Полученные результаты интересны тем, что существующие методы оценки псевдоспектров оказываются несостоятельными даже при значениях разности частот подлежащих разделению компонент, оказывающихся хотя и выше частоты разрешения, но близких к ней. Рассмотрим теперь случай второй.

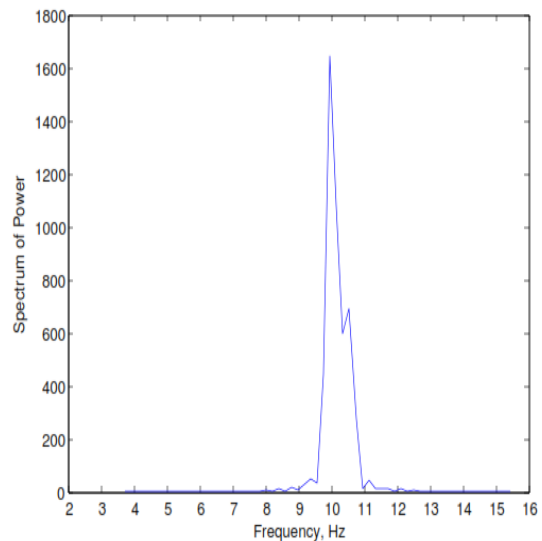


Рис. 3 Оценка псевдоспектра ряда (5) по методу PERIODOGRAM ($f_1=0$ и $f_2=0.5$ Гц.)

2) Разность частот $\Delta f = f_1 - f_2 < f_r$. Мы рассматриваем ряд (5) с теми же параметрами, за исключением частот $f_1=0$ Гц. и $f_2=0.3$ Гц. На рис. 4 представлена оценка псевдоспектра (5) для разности частот $\Delta f = 0.3$ Гц.

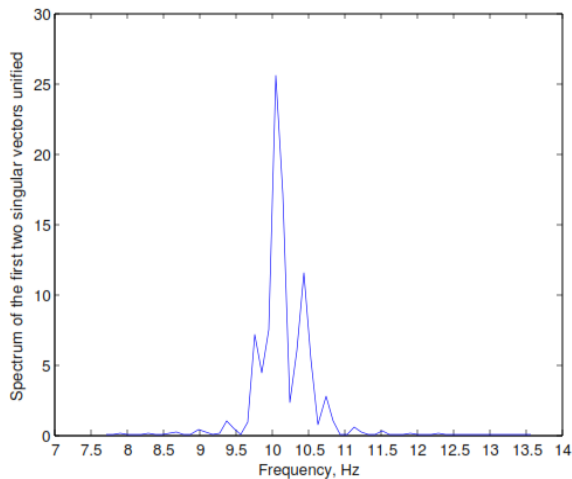


Рис. 4 Оценка псевдоспектра ряда (5) по методу PERIODOGRAM по двум объединенным правым сингулярным векторам ($f_1 = 0$ и $f_2 = 0.3$ Гц.)

Отметим, что была использована матрица данных X_d размерами 275×20 . При этом ортогональная матрица левых сингулярных векторов U имела размеры 275×4 , а правых V - 20×4 . В виду чересвычайной громоздкости перечисленных матриц, мы не имеем возможности привести их в данной публикации. Для оценки псевдоспектра, приведённой на рис.4, были использованы два первых левых сингулярных вектора. Их объединение дало новый временной ряд с числом отсчётов, равным $N_1=550$. Таким образом,

время сингулярной развертки $T_s = 5.5$ сек и частота разрешения уменьшается до $f_r=0.18$ Гц. Именно последнее обстоятельство позволило получить качественное разрешение, что хорошо видно из рис.4. Коэффициент отделимости двух пиков, изображенных

$$S(f) = \frac{1.9}{2.3} > 0.3$$

на рис. 4, что свидетельствует о надежной идентификации частот составляющих детерминированных компонент.

3. Заключение

В работе предложен способ улучшения разрешающей способности оценок псевдоспектров временных рядов, содержащих только детерминированные периодические компоненты. Метод основывается на низкоранговых тензорных разложениях матриц данных временного ряда, а также, на результатах предыдущих публикаций, в которых было показано, что составляющие векторы подобных разложений, коллинеарные соответствующим сингулярным векторам матриц данных, обладают псевдоспектральной структурой, подобной псевдоспектральной структуре исходного ряда. Отсюда вытекает, что вместо исходного

ряда можно оценивать спектр ряда, составленного из векторов низкоранговой аппроксимации. Это позволяет заменить время наблюдения "временем сингулярной развертки", которая, в общем случае превосходит естественное время наблюдения ряда в r раз (r —число периодических компонент). Последнее позволяет уменьшить частоту спектрального разрешения, что, в свою очередь, позволяет получить надежные оценки частот детерминированных периодических компонент. Эффективность практического использования метода доказана на конкретных численных примерах, реализованных средствами программного пакета MatLab.

Литература:

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 1990, 584 стр.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., Мир, 1978, 848 стр.
3. Milnikov A. A. Low Rank Tensorial Approximation Method of Computation of Singular Values and Singular Vectors for SVD Problem, Proceedings of the 6th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modeling, Greece, 2012, pp.49-53.
4. Milnikov A. Singular decomposition of data matrix of time series with periodic components and resolving capacity of their pseudospectra estimation, Proceedings of the 2nd international Conferences on Circuits, Systems, Communications, Computers and Applications (CSCCA'13), Dubrovnik, Croatia, 2013, pp. 58-63
5. Бузаладзе А.З., Мачарадзе Т.Д., Мильников А.А. Сингулярные разложения матрицы данных временных рядов с периодическими компонентами и разрешающая способность оценивания их псевдоспектров. Georgian Engineering News, No. 4, (vol. 64), 2012, pp. 46-51.