და არაცოცხალი ბუნების სისტემათა მოწყობის ერთიანი – საყოველთაო სურათი.

მართვის სინერგეტიკული თეორია გვაძლევს საშუალებას ახლებურად დაისვას და შემდეგ ეფექტურად ამოიხსნას არაწრფივი სისტემების მართვის ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც ვერ ხერხდება მართვის თეორიის კლასიკური მეთოდებით. როგორც ცნობილია, დინამიკური სისტემის ფუნქციონირების პროცესში მისი წონასწორული მდგომარეობები სისტემის პარამეტრების ცვლილების გამო ხშირად კარგავენ მდგრადობას, რის შედეგადაც სისტემაში წარმოიშობიან მიულევადი, მცირე ამპლიტუდის მქონე პერიოდული რხევები. პარამეტრების ასეთ მნიშვნელობას უწოდებენ სისტემის ბიფურკაციის წერტილებს. ბიფურკაციის მომენტში სისტემა ხდება სტრუქტურულად არამდგრადი, რაც დაკავშირებულია მისი ფაზური პორტრეტის ცვლილებასთან. ე.ი. სტრუქტურულად არამდგრადი სისტემები მგრძნობიარენი არიან მცირე გარეშე ზემოქმედებაზეც კი. ამისათვის მნიშვნელოვანი ხდება სხვადასხვა ბუნების მქონე ობიექტების მართვა არაძალისმიერი მართვის თანამედროვე შესაძლებლობების გამოყენებით. ბიფურკაციის წერტილების ამოცანებს ვხვდებით მართვის თეორიაში, მექანიკაში, ბიოლოგიაში და ა.შ. [1, 2].

სტატიაში წარმოდგენილია არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მართვის ეფექტური კანონების სინთეზის სინერგეტიკული მეთოდი, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ეკოლოგიური სისტემის მართვის ამოცანების გადაწყვეტისას, რომლებშიც შესაძლოა წარმოიქმნეს ბიფურკაციისა და ქაოსის მოვლენები. აქვე განხილულია მართვის თეორიის მეთოდების გამოყენების მაგალითი მარტივი არაწრფივი ობიექტისათვის, რომელშიც მართვის ფუნქციონირების გარეშე წარმოიქმნება კატასტროფული მოვლენები.

განვიხილოთ რომელიმე ბიოლოგიური პოპულაციის ოპტიმალურ დონეზე შენარჩუნების ამოცანა, რომელიც საკვების მოპოვების კონკურენციის გათვალისწინებით აღიწერება შემდეგი სახის განტოლებით [1,3]:

$$\dot{x}(t) = \alpha\, x - \beta\, x^2 - \mu \ , \qquad (1)$$

სადაც: x-პოპულაციის კონკრეტულ სახეობაში წარმომადგენელთა რაოდენობაა; α, β-დადებითი რიცხვებია; μ-მმართველი პარამეტრია. (1) განტოლებით შეიძლება, კერძოდ, აღვწეროთ თევზჭერის მოდელი. μ-ამ შემთხვევისათვის წარმოადგენს თევზჭერის კვოტას.

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $\mu = \mu_0$-წინასწარ მოცემული სიდიდეა. მოვძებნოთ თევზჭერის შესაძლო მაქსიმალური კვოტა. ამისათვის (1) განტოლების მარჯვენა მხარე გავაწარმოოთ x-ის მიხედვით და შედეგი გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$x_{\max} = \frac{\alpha}{2\beta} \quad \text{და} \quad \mu_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta} \ . \qquad (2)$$

გამოვიკვლიოთ (1) განტოლება თვისობრივად. ამისათვის თავდაპირველად შევისწავლოთ მისი სტაციონალური მდგომარეობა:

$$\alpha\, x_s - \beta\, x_s{}^2 - \mu = 0 \, . \qquad (3)$$

(3)-დან განვსაზღვროთ დამოკიდებულება $x_s(\mu)$:

$$x_s = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\mu}}{2\beta} \, , \qquad (4)$$

რომლის გრაფიკული სახეც $\alpha = \beta = 1$ პირობის შემთხვევაში წარმოდგენილია ნახ. 1-ზე.

$x_s(\mu)$ დამოკიდებულების გრაფიკს გააჩნია ორი ტოტი, რომლებიც ერთმანეთს ერწყმებიან μ და x_s იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც განსაზღვრული არიან (2) პირობით. ამ მოვლენას უწოდებენ ბიფურკაციულს და წერტილს, რომლის კოორდინატებიც გამოითვლებიან (2) გამოსახულებით, უწოდებენ სისტემის ბიფურკაციულ წერტილს.

გამოვიკვლიოთ სისტემა ამ წერტილის მიდამოში. ამისათვის შემოვიღოთ გადახრა $y = x - q_0$ და ჩავსვათ პოტენციალური ფუნქციის გამოსახულებაში, რომელსაც ჩვენი შემთხვევისათვის აქვს სახე:

$$V = \frac{\mu - 1}{2} x^2 + \frac{1}{4\beta} x^4 \ . \qquad (5)$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას:

$$\dot{y}(t) = \alpha\, q_0 - \beta\, q_0^2 + (\alpha - 2\beta q_0) y - \beta\, y^2 - \mu \qquad (6)$$

სადაც: q_0-წერტილის კოორდინატაა.

უკანასკნელი განტოლების თვისება დამოკიდებულია μ მმართველ პარამეტრის მნიშვნელობაზე. შევირჩიოთ ოპტიმალური მნიშვნელობა $\mu = \mu_0$ და $q_0 = x_{\max}$, რომლებიც უზრუნველყოფენ თევზჭერის მაქსიმალურ კვოტას. შედეგად მივიღებთ განტოლებას

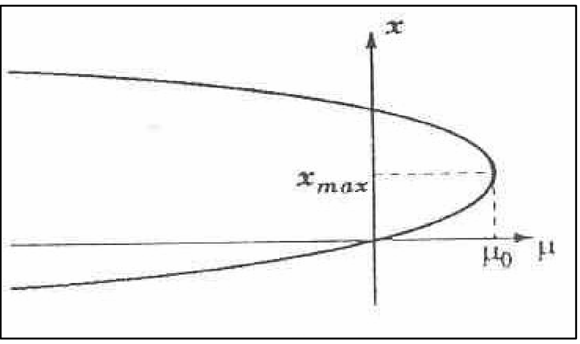
$$\dot{y}(t) = -\beta\, q_0^2 \, , \qquad (7)$$

რომლის ამონახსნსაც აქვს სახე:

$$y(t)=\frac{y_0}{\beta\, q_0^2 t+1}\ . \qquad (8)$$

(8) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ (7) განტოლების ამონახსნი მდგრადია (როცა $y=0$) საწყისი პირობებისათვის $y_0=x_0-x_{\max}>0$, და არამდგრადია (როცა $y\to 0$) პირობებისათვის $y_0<0$. აქედან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: (7) საწყისი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აღწერს პოპულაციის მდგომარეობას მდგრადია, როცა $x_{\max}=\dfrac{\alpha}{2\beta}$ მხოლოდ იმ საწყისი პირობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x_0>x_{\max}$, და არამდგრადია, როცა $x_0<x_{\max}$.

ამრიგად, თევზჭერის კვოტის ოპტიმიზაციას $u=\mu_0=const$ ხისტი მართვის შემთხვევაში მივყავართ დამყარებული მდგომარეობის არამდგრადობამდე, რაც მცირე ფლუქტუაციების არსებობის შემთხვევაში იწვევს პოპულაციის განადგურებას, კატასტროფას. ეს კი შედეგია ბიფურკაციის წერტილით გამოწვეული მოვლენისა, რომელიც შეესაბამება თევზჭერის მაქსიმალურ ხისტ გეგმას. აღწერილი მოვლენა შეისწავლება თანამედროვე არაწრფივი სისტემების დინამიკასა და სინერგეტიკაში [1].



ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება მართვის თეორიის გამოყენებით თავიდან ავიცილოთ პოპულაციის კატასტროფული განადგურება, რომელიც გამოწვეული იყო თევზჭერის მაქსიმალურად ხისტი გეგმით. გამოვიყენოთ (6) განტოლება და μ მმართველი პარამეტრი განვიხილოთ როგორც y-ის ფუნქცია. ე.ი. ხისტი გეგმა $\mu=\mu_0$ შევცვალოთ უკუკავშირით:

$$\mu(y)=-\alpha\, q_0+\beta\, q_0^2-\gamma\,\mu\ . \qquad (9)$$

უკანასკნელი გამოსახულების გათვალისწინებით (6) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\dot{y}(t)=(\alpha-2\beta q_0-\mu\ )y-\beta\, y^2. \qquad (10)$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$\eta=\alpha-2\beta q_0-\mu$, მაშინ (10) განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\dot{y}(t)=\eta y-\beta\, y^2$, (11)

რომლის ამონახსნიცაა:

$$y(t)=\frac{\eta y_0}{\eta e^{-\eta t}-\beta y_0\left(e^{-\eta t}-1\right)}\ . \qquad (12)$$

თუ შევირჩევთ $\eta<0$, ე.ი. $\gamma>\alpha-2\beta q_0$, მაშინ (12) გამოსახულებიდან მივიღებთ, რომ როცა $t\to\infty$, მაშინ გადახრა $y\to 0$. ეს კი ნიშნავს რომ (12) გამოსახულება ასიმპტოტურად მდგრადია $y=0$-ის მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu(y)$ მართვა უზრუნველყოფს პოპულაციის მოცემულ q_0 დონეზე შენარჩუნებას. ამასთან ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ოპტიმალურიც $q_0=x_{\max}=\dfrac{\alpha}{2\beta}$.

$\mu(y)$-ის გათვალისწინებით (1) განტოლება $x(t)$ საწყისი ცვლადის მიმართ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

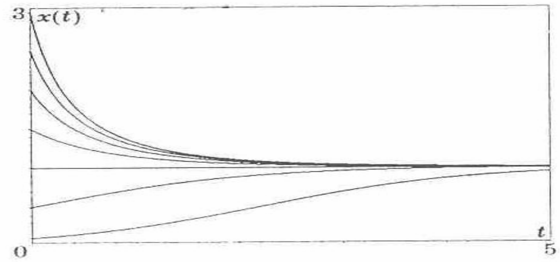
$$\dot{x}(t)=(\alpha-y)x-\beta\, x^2+\frac{\mu\varepsilon}{2\beta}-\frac{\alpha^2}{2\beta} \qquad (!3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\gamma=\beta q_0=\dfrac{\alpha}{2}$, მაშინ (!3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\dot{x}(t)=\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\, x\right)x\ , \qquad (14)$$

რომელიც აღწერს კრიტიკულ ბიფურკაციას და წარმოადგენს ცნობილ ლოგისტიკურ განტოლებას [2]. ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე: $x(t)=\dfrac{\alpha\, x_0}{\alpha\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}-2\beta x_0\left(e^{-\frac{\alpha}{2}t}-1\right)}$. (15)

იგი ასიმპტოტურად მდგრადია $x_s=\dfrac{\alpha}{2\beta}$ ატრაქტორის მიმართ და შეესაბამება თევზჭერის ოპტიმალურ კვოტას. ნებისმიერი საწყისი პირობების შემთხვევაში სინთეზირებული სისტემა ყოველთვის გამოდის ამ მდგომარეობაზე, რაც მტკიცდება ნახ. 2-ზე წარმოდგენილი მრუდებით, რომლებიც მიღებული არიან სისტემის მოდელირების შედეგად.



ნახ. 2

ამრიგად, (γx) უკუკავშირის შემოტანით მართვის კანონმა საშუალება მოგვცა გადავსულიყავით ბიფურკაციიდან (რომელიც მომავალში გამოიწვევდა კატასტროფას) ლოგისტიკურ განტოლებაზე, რომელსაც გააჩნია თვითორგანიზების თვისება. ამასთან, შესაძლებელია განვახორციელოთ ჭევზჭერის მოცემული კვოტა, რომელიც შესაძლებელია იყოს მაქსიმალურიც. უკუკავშირში γ კოეფიციენტის მცირე გადახრა გამოიწვევს მწარმოებლურობის მცირე დაწევას და არა კატასტროფას, ხისტი გეგმის $u = \mu_0 = const$ არჩევის შემთხვევაში.

მიუხედავად იმისა, რომ წარმოდგენილი ფაქტი გამოვლენილი იქნა თევზჭერის მარტივ მაგალითზე, იგი წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ყველა ისეთი არაწრფივი სისტემის მართვის ამოცანების გადაწყვეტისას, რომლებშიც შესაძლოა წარმოიქმნეს ბიფურკაციისა და ქაოსის მოვლენები. ცხადია, რომ (μ) მმართველი პარამეტრის შერჩევის გზით შესაძლებელია სისტემა ნებისმიერი საწყისი პირობებიდან გავიყვანოთ მისი მდგომარეობათა სივრცის სასურველ ატრაქტორზე და ვუზრუნველყოთ მიმართული თვითორგანიზება-მიზიდვა ინვარიანტული მრავალსახეობისაკენ (ატრაქტორისაკენ).

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. მართვის თეორია, სინერგეტიკა. პროფ. ა. გუგუშვილის და პროფ. რ.ხუროძის რედაქციით. ნაწ.3, თბილისი, 2000. 869გვ.
2. Колесников А.А. Синергетическая теория управлениeяю. М.: Энергоатомиздат, 2004.320.

სივრცული ეკონომიკური პროცესების პარამეტრული იდენტიფიკაციისათვის

ზურაბ წვერაიძე — სტუ-ს პროფესორი
ნინო ვარძიაშვილი — სტუ-ს დოქტორანტი
მაია ჭოლიკიძე — სტუ-ს დოქტორანტი

სივრცული ეკონომიკური პროცესები, დემოგრაფიული პროცესი და სხვა მიეკუთნებიან მაკროსისტემათა კლასს. მაკროსისტემას ვუწოდებთ ისეთ სისტემას, რომელიც როგორც ერთიანი ავლენს სხვა ბუნებასა და თვისებებს, ვიდრე მისი შემადგენელი ნაწილები. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ისეთ სივრცულ ეკონომიკურ პროცესებს, რომლებიც როგორც ერთიანი განეკუთვნება დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს იმ დროს, როდესაც მისი შემადგენელი ნაწილების ფუნქციონირება არადეტერმინირებულია, კერძოდ, შემთხვევითია. ასეთი პროცესების ამსახველ განტოლებას ზოგად აქვს შემდეგი სახე

$$\dot{E} = \alpha E + f(\Delta x) \quad (1)$$

აქ E განსახილველი პროცესის მაკროპარამეტრია. Δx – შემთხვევითი პროცესები მიკრო დონეზე. f – არაწრფივი ფუნქციონალია.

მაკროსიტემებში საქმე გვაქვს ურთიერთდამოკიდებულ და ურთიერთმოქმედ დინამიკურ პროცესებთან, რომლებიც მიმდინარეობენ დროის სხვადასხვა მასშტაბებში. ჟ. მაქსველმა [1] დაამტკიცა, რომ ასეთი პროცესების ფაზური წერტილების განაწილება – $f(q,p,t)$ ფაზურ სივრცეში — L^i, მიისწრაფის სტაციონალური განაწილებისაკენ $f^0(q,p)$, რომელსაც განსახილველი სისტემის მაკრომახასიათებელს უწოდებენ. აქ $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ და $\bar{p} = (p_1, q_2, \ldots)$ ელ. ნაწილაკების კოორდინატებისა და იმპულსების ვექტორებია. ლ. ბოლცმანს ეკუთვნის განაწილების ფუნქციის ევოლუციის აღმწერი კინეტიკური განტოლება, რომელთა ამოხსნათა თვისებების კვლევისათვის გამოიყენა ენტროპია. აღმოჩნდა, რომ ბოლცმანის კინეტიკური განტოლების ამოხსნათა სიმრავლეზე