МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелли Мхитарян
докторант Тбилисского Технического Университета

РЕЗЮМЕ

Программа курса вопросов высшей математики на тему «Дифференциальные уравнения» считается основной темой. Тема «Дифференциальные уравнения» углубляет материал курса начал анализа. Основная цель изучения – показать учащимся, что дифференциальные уравнения являются одним из основных орудий математического естествознания, т.е. познакомить их с математическим моделированием реальных процессов методом дифференциальных уравнений.

Важно разобраться в геометрической интерпретации уравнений первого порядка и показать, как составляются дифференциальные уравнения, отправляясь от естественнонаучных примеров.

Выбор задач для решения на занятиях предоставляется преподавателю, который знает уровень подготовки и интересы учеников.

Всегда можно описать процесс составления дифференциального уравнения более подробно. Прежде всего нужно установить, какому закону подчиняется процесс, описываемый в условии задачи, и определить, какую из величин, участвующих в процессе. Потом переходить на составление дифференциального уравнения этого процесса.

В этой статье показаны, на решенных задачах, реально протекающие процессы в окружающем мире. Непосредственное применение построенных математических моделей. Приведем две задачи.

Рассмотрим пример составления дифференциальных уравнений в задачах динамики.

MATHEMATICAL MODELING OF REAL PROCESSES BY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Neli Mkhitariani

RESUME

The course of higher mathematics questions on “Differential Equations” is considered to be the main topic. Subject “Differential Equations” deepens the course material analysis began. The main purpose of the study - to show students that the differential equations is one of the basic tools of mathematical science to acquaint them with the mathematical modeling of real processes by differential equations.

It is important to understand the geometric interpretation of first-order equations and show how to write differential equations, starting from the natural science examples.

The choice of tasks for solving in the classroom is given to the teacher, who knows the level of preparation and interests of the students.

It is always possible to describe the process of drawing up a differential equation in more detail. First of all you need to determine which law is subject to the process described in the problem and determine which of the variables involved in the process. Then move on to the preparation of a differential equation of the process.

This article shows, on the solution of the problem, real processes occurring in the surrounding world. Direct application of the constructed mathematical models. Here are two tasks.

Let us consider an example of the formulation of differential equations in problems of dynamics.

დიფერენციალური განტოლებების რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

ნელი მხითარიანი,
თბილისის ტექნიკური
უნივერსიტეტის დოქტორანტი

რა თქმა უნდა, უმაღლესი მათემატიკის კითხვები “დიფერენციალური განტოლებები” ითვლება მთავარ თემად. თემა “დიფერენციალური განტოლებები” აღრმავებს ანალიზის დასაწყისის კურსის მასალას. მთავარი სასწავლო მიზანი - ვაჩვენოთ მოსწავლეებს, რომ დიფერენციალური განტოლებები არის ერთ-ერთი ძირითადი ინსტრუმენტი მათემატიკური მეცნიერების, ანუ, გავაცნოთ რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელირება დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით.

მნიშვნელოვანია იმის გაგება თუ, როგორ უნდა შევადგინოთ პირველი რიგის განტოლებების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, და ვაჩვანოთ, როგორ იწერება დიფერენციალური განტოლებები, დაყრდნობილი საბუნებისმეტყველო მაგალითებზე.

გამორჩეული ამოცანების ამოსახსნელად გაკვეთილებზე მიეცემა მასწავლებელს, რომლებმაც იცის მოსწავლის მომზადების და ინტერესების დონე.

ყოველთვის შესაძლებელია დიფერენციალური განტოლებების პროცესების აღწერა უფრო დეტალურად. პირველ რიგში უნდა დადგინდეს, რომელ კანონს ექვემდებარება აღწერილი პროცესი ამოცანის პირობიდან და განისაზღვროს, რომელი ცვლადი ჩართულია ამ პროცესში. შემდგომ კი გადასვლა

დიფერენციალური განტოლებების შედგენაზე.

ამ სტატიაში ნაჩვენებია, ამოხსნილ ამოცანებში, რეალური პროცესების მიმდინარეობა მსოფლიოში. პირდაპირ გამოყენებულია მათემატიკური მოდელები. ამოვხსნად ორი ამოცანა.

განვიხილოთ მაგალითი დიფერენციალური განტოლების შედგენის დინამიკის ამოცანებში.

Задача 1.

Составим дифференциальное уравнение движения парашютиста, если сила сопротивления воздуха принимается пропорциональной скорости движения.

Решение.

Сила тяжести равна mg, а сила сопротивления среды пропорциональна направлению скорости, т.е. равна $-kv$. Поэтому общая сила F, действующая на парашютиста, равна $mg-kv$. По второму закону Ньютона имеем: $F=ma$. Таким образом, получаем: $ma=mg-kv$. Учитывая, что скорость есть первая, а ускорение – вторая производная искомой функции y, выражающей расстояние от положения парашютиста в начальный момент времени до его положения в момент времени t (мы считаем, что спуск парашютиста происходит по прямой), приходим к следующему дифференциальному уравнению движения:

$$my''=mg-ky' \tag{1}$$

Решение.

Искомая функция y выражает расстояние от положения парашютиста в начальный момент времени до его положения в момент времени t. Положим $y'=v$, тогда $y''=v'$ и уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{mv'}{mg-kv}=1$$

и далее

$$-\frac{m}{k}*\frac{v'}{v-\frac{mg}{k}}=1,$$

т.е.

$$\left(-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|\right)'=t',$$

откуда находим общее решение уравнения

$$-\frac{m}{k}\ln\left|v-\frac{mg}{k}\right|=t-\frac{m}{k}\ln|C|$$

(здесь произвольную постоянную удобно записать в виде $-\frac{m}{k}\ln|c|$).

$$v-\frac{mg}{k}=Ce^{-\frac{k}{m}t}. \tag{2}$$

По условию задачи начальная скорость движения равна нулю, т.е. при $t=0$ имеем $v=0$. Подставив эти значения в равенство (2), находим, что $C=-\frac{mg}{k}$, и, следовательно, эту формулу можно переписать в виде

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{3}$$

Отсюда следует, что с течением времени скорость падения парашютиста стремится к значению $v_{пред}=\frac{mg}{k}$.

Чтобы узнать закон движения парашютиста, надо по найденному значению скорости найти путь, пройденный к моменту времени t. Для этого перепишем равенство (3) в виде

$$y'=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

и решим полученное дифференциальное уравнение. Нужно найти первообразную для функции

$$\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Ею будет функция

$$\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Значит, общее решение уравнения таково:

$$y=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)+C. \tag{4}$$

Для отыскания значения C заметим, что при $t=0$ пройденный путь равен нулю, т.е. при $t=0$ имеем $y=0$. Подставив эти значения в равенство (4), получим:

$$0=\frac{m^2k}{k^2}+C,$$

$$C=-\frac{m^2k}{k^2}.$$

Итак, закон движения парашютиста имеет вид:

$$y=\frac{mg}{k}\left(t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right).$$

Дифференциальные уравнения в химии.

Задача 2.

При некоторых химических реакциях возникающее в процессе реакции вещество действует как катализатор, ускоряющий течение реакции. В этом случае скорость реакции пропорциональна как концентрация исходного вещества, так и некоторой линейной функции от концентрации возникающего вещества (автокаталитическая реакция). Напишем дифференциальное уравнение для количества y вещества, возникшего в момент времени t, если начальная концентрация равна a.

Решение.

Опираясь на условия и рассуждая получаем дифференциальное уравнение

$$y' = (k + my)(a - y).$$

Здесь $a - y$- концентрация исходного вещества, а $k + my$ - линейная функция от концентрации возникающего вещества (k и m- некоторые числовые коэффициенты).

Заметим, что если бы в роли катализатора выступало исходное вещество, то линейная функция, о которой идет речь в задаче, имела бы вид $k + m(a - y)$, а дифференциальное уравнение выглядело так:

$$y' = \left(k + m(a - y)\right)(a - y).$$

Задача 3.

Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20%кслорода. В сосуд каждую секунду втекает 0,2 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

Решение.

Выберем в качестве независимой переменной время t и обозначим через $y(t)$ количество литров азота в сосуде через t секунд после начало опыта. Тогда азот будет составлять $\frac{y}{40}$ частей всей смеси. За промежуток времени Δt сосуд поступит $0{,}2\Delta t$ л азота, а вытечет $0{,}2\Delta t$ л смеси. Если считать, что за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ концентрация азота в сосуде оставалось неизменной, то в этом объеме смеси будет

$\frac{y}{40} * 0{,}2\Delta t$ (л) азота, а потому прирост количества литров азота выразится так:

$$\Delta y \approx 0{,}2\Delta t - \frac{0{,}2y}{40}\Delta t.$$

Мы написали приближенное равенство, потому что на самом деле за малый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ концентрация азота хоть немного, но изменяется. Если же разделить обе части этого равенства на Δt и перейти к пределу, когда $\Delta t \to 0$, то, учитывая, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$, получим точное равенство

$$y' = 0{,}2\left(1 - \frac{y}{40}\right)$$

Оно является **дифференциальным уравнением процесса**.

Решим это уравнение. Для этого преобразуем его к виду

$$y' = -0{,}005(y - 40)$$

Это **дифференциальное уравнение процесса выравнивания**. Воспользуемся формулой, получим:

$$y = 40 + (y_0 - 40)e^{-0{,}005t}$$

Здесь y_0 – значение искомой величины y в момент времени $t = 0$. Но по условию в начальный момент времени в 40-литровом сосуде было 80% азота, т.е. 32 л азота, значит, $y_0 = 32$. Поэтому

$$y = 40 - 8e^{-0{,}005t}.$$

Теперь уже легко найти, когда концентрация азота в смеси будет 99%. В это время в сосуде окажется 39,6 л азота. Значит, надо решить показательное уравнение

$$39{,}6 = 40 - 8e^{-0{,}005t}.$$

Решая его, последовательно находим:

$$8e^{-0{,}005t} = 0{,}4$$
$$e^{-0{,}005t} = 0{,}05$$
$$-0{,}005t = \ln 0{,}05$$
$$t = 200 \ln 20 \approx 600 \text{ с.}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н.Колмогоров, «Алгебра и начало анализа, 10-11 кл.». – М.: просвещение 2012 г. – 384 с.

В этом учебнике приведены несколько задач на дифференциальные уравнения, которые помогают уже в школьной программе соприкоснуться с дифференциальными уравнениями.

2. Н.В.Богомолов. Практические занятия по математике. Москва «Высшая школа» 2003.

3. Составитель С.И.Шварцбурд. Избранные вопросы математики. Москва «Просвещение» 1990.