МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нели Мхитарян,
докторант Тбилисского Технического Университета

Понятия о дифференциалах в современной математике являются одними из главенствующих и основных понятий, помогающие для создания моделей, находящихся в реальном мире. Именно с помощью этих понятий, на протяжении всего этого времени, людям удалось проникнуть в тайны природы. Например, рассчитать движение движущегося тела, строить космические корабли, создать мир техники и т.д., на котором основана современная наука.

Одним из основных методов познания природы является опыт или эксперимент. С проведением многочисленных экспериментов или опытов были установлены многие законы природы. В самых различных областях науки, за последние два столетия, все большую роль стал играть метод математического моделирования. Можно описать схематически процесс и методику его решения. Опишем характер и методику их решения. Допустим, происходит некий процесс, например, физический, химический или биологический.

Если имеется достаточно полная информация о течении этого процесса, то можно попытаться построить математическую модель.

Можем схематически определить процесс математического моделирования.

Особенно дифференциальное исчисление оказало большое влияние на развитие и преподавание математики. Простотой изложения и несравненными возможностями являются темы дифференциального исчисления.

В этой статье показаны, реально протекающие процессы в окружающем мире.

1. Дифференциальные уравнения
2. Математическое моделирование
3. Реально протекающие процессы

MATHEMATICAL MODELING OF REAL PROCESSES BY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The concepts of differentials in modern mathematics are one of the main and basic concepts that help to create models in the real world. With the help of these concepts, throughout this time, people managed to penetrate the secrets of nature. For example, calculate the motion of a moving body, build spaceships, create a world of technology, etc., on which modern science is based.

One of the main methods of knowledge of nature is experience or experiment. With the conduct of numerous experiments or experiments, many laws of nature were established. In the most diverse fields of science over the past two centuries, the method of mathematical modeling has become increasingly important. Suppose there is a process, for example, physical, chemical or biological.

If there is enough complete information about the flow of this process, then we can try to build a mathematical model.

We can schematically determine the process of mathematical modeling.

Especially differential calculus had a great influence on the development and teaching of mathematics. In our time, works and textbooks on differential calculus are of great interest for the development of mathematical science.

This article shows, real processes in the surrounding world.

1. Differential Equations
2. Mathematical modeling
3. Really occurring processes

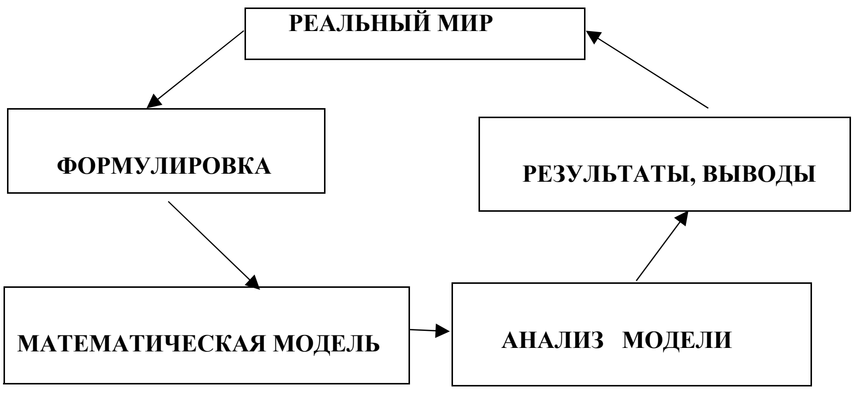

Рис.1. **Процесс математического моделирования**

რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელირება დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით

ნელი მხითარიანი,
თბილისის ტექნიკური
უნივერსიტეტის დოქტორანტი

თანამედროვე მათემატიკის დიფერენციალური ცნებები ერთ-ერთი მთავარი და ძირითადი ცნებაა, რომელიც რეალურ სამყაროში მოდელების შექმნას უწყობს ხელს. ამ ცნებების დახმარებით, მთელი ამ ხნის მანძილზე ადამიანებმა შეძლეს ბუნების საიდუმლოებში შეღწევა. ბუნების შემეცნების ერთ-ერთი მთავარი მეთოდი ცდა ან ექსპერიმენტია. მრავალი ექსპერიმენტით ან ექსპერიმენტის ჩატარებით მრავალი ბუნების კანონები შეიქმნა. ბოლო ორი საუკუნის განმავლობაში,

შესაძლებელია სქემატურად გამოვიყენოთ პროცესი და მისი ამოხსნის მეთოდიკა. ვთქვათ, მიმდინარეობს რაიმე გარკვეული პროცესი, მაგალითად, ფიზიკური, ქიმიური ან ბიოლოგიური.

თუ ამ პროცესის ნაკადის შესახებ საკმარისი სრული ინფორმაცია არსებობს, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევქმნათ მათემატიკური მოდელი.

ჩვენ შეგვიძლია სქემატურად განვსაზღვროთ მათემატიკური მოდელირების პროცესი.

განსაკუთრებით დიდი გავლენა ჰქონდა დიფერენციალურ აღრიცხვას მათემატიკის განვითარებასა და სწავლებას. ჩვენს დროს, დიფერენციალური გათვლების შესახებ მათემატიკის ნამუშევრები და სახელმძღვანელოები მეცნიერების განვითარებისათვის დიდ ინტერესს გამოხატავენ.

ამ სტატიაში ნაჩვენებია რეალური პროცესების მიმდინარეობა მსოფლიოში.

1. დიფერენციალური განტოლებები
2. მათემატიკური მოდელირება
3. რეალური პროცესების მიმდინარეობა

Задача.

Найти количество сахара в каждом резервуаре в момент времени $t \geq 0$, если даны три цилиндрических бака радиусами $r = 20$ л/мин и объемами $V_1 = 10$ л , $V_2 = 30$ л, и $V_3 = 60$ л . Начальное количество сахара в трех баках равны соответственно $x_1(0) = 15$ кг , $x_2(0) = 9$ кг и $x_3(0) = 9$ кг.

Решение

Учет концентраций сахара можно выразить данной системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1^{'} = -k_1 x_1 \\ x_2^{'} = k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ x_3^{'} = k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{cases}$$

где $k_i = \frac{r}{V_i}, \ i = 1,2,3.$

Если подставим числовые данные в это равенство, получим задачу Коши. Применим метод собственных значений.

$$x^{'}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$

Это приводит к характеристическому уравнению $A - \lambda E = (-2-\lambda)(-\frac{2}{3} - \lambda)(-\frac{1}{3} - \lambda)$

Матрица коэффициентов в уравнении имеет различные собственные значения $\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -\frac{2}{3}, \ \lambda_3 = -\frac{1}{3}$

Подставим все три значения в полученное уравнение.

1) Когда $\lambda_1 = -2$ $$A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Умножим эту матрицу на матрицу с коэффициентами $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -2\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Решим систему и найдем эти коэффициенты. $$\begin{cases} 2a - 2\frac{2}{3}b = 0 \\ \frac{2}{3}b - 2\frac{1}{3}c = 0 \end{cases}$$

Решение получаем такое когда $b = 7$ и $c = 2$, соответственно получаем, что $a = -2$. Таким образом, для значения $\lambda_1 = -2$ получаем собственный вектор $V_1 = \left(9\frac{1}{3}; 7; 2\right)$.

2) Когда $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ $$A + \frac{2}{3}E = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Умножим эту матрицу на матрицу с коэффициентами $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $$\begin{pmatrix} -1\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Решим систему и найдем эти коэффициенты. $$\begin{cases} a = 0 \\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c = 0 \end{cases}$$

Решение получаем такое, $a = 0$. Когда $b = -1$ и $c = 2$ соответственно получаем. Таким образом, для значения $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ получаем собственный вектор $V_2 = (0; -1; 2)$.

3) Когда $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ $$A + \frac{1}{3}E = \begin{pmatrix} -1\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Умножим эту матрицу на матрицу с коэффициентами $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $$\begin{pmatrix} -1\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Решим систему и найдем эти коэффициенты. $$\begin{cases} 2a - \frac{1}{3}b = 0 \\ \frac{2}{3}b - 2\frac{1}{3}c = 0 \end{cases}$$

Решение получаем такое $a = 0$ и $b = 0$. так как из первой и третьей строк получаем нули, то третий коэффициент должен быть отличен от нуля, например равен 1. Значит $c = 1$. Таким образом, для значения $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ получаем собственный вектор $V_3 = (0; 0; 1)$.

Из полученных данных можно написать общее решение этого уравнения

$$x(t) = C_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 V_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 9\frac{1}{3} \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$x_1(t) = 9\frac{1}{3} C_1 e^{-2t}$$
$$x_2(t) = 7C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-\frac{2}{3}t}$$
$$x_3(t) = 2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-\frac{2}{3}t} + C_3 e^{-\frac{1}{3}t}$$

Подставляя $x_1(0) = 15$ кг , $x_2(0) = 9$ кг и $x_3(0) = 9$ кг эти значения в формулу при $t = 0$, получаем, что $C_1 = \frac{45}{28}$, $C_2 = 2\frac{1}{4}$, $C_3 = 1\frac{2}{7}$.

После того, как нашли все коэффициенты, можно записать систему уравнений количества сахара в момент времени t в трех баках.

$$x_1(t) = 15e^{-2t}$$
$$x_2(t) = 11\frac{1}{4} e^{-2t} - 2\frac{1}{4} e^{-\frac{2}{3}t}$$
$$x_3(t) = 3\frac{3}{14} e^{-2t} + \frac{9}{2} e^{-\frac{2}{3}t} + 1\frac{2}{7} e^{-\frac{1}{3}t}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев К.К., Служивый М.Н., Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К. К. Васильев, М. Н. Служивый. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. - 170 с.
2. Зарубин В.С., Маркелов Г.Е. Лекции по основам математического моделирования: Учебное пособие. – М.: Изд.-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2010. – 197 с.
3. Коробейников А.Г. Разработка и анализ математических моделей с использованием MATLAB и MAPLE. Учебное пособие. Санкт-Петербург, 2010. - 145 с.
4. Муравьева-Витковская Л.А. Основы распределенного моделирования. Учебное пособие. Санкт-Петербург. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 150 с.
5. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. М.: КомКнига, 2007. - 192 с.
6. Павловский, Ю. Н., Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. Компьютерное моделирование. Учебное пособие для вузов. - М.: Физматкнига, 2014. - 304 с.
7. Петухов О.А., Морозов А.В., Петухова Е.О. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое: учебное пособие / О.А. Петухов, А.В. Морозов, Е.О. Петухова. Санкт-Петербург. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 276 с.
8. Рябов О.А. Моделирование процессов и систем. Учебное пособие / Красноярск, 2008 – 130 с.
9. Смирнов В.В. Математическое моделирование: конспект лекций для студентов «Технология машиностроения» всех форм обучения / В.В. Смирнов, Бийск, Изд-во Алт. Гос тех. Ун-та, ВТИ АлтГТУ, 2006. -103 с.
10. Смиряев А.В., Исачкин А.В., Панкина Л.К. Моделирование в биологии и сельском хозяйстве: уч. пособие. Издание 3-е исправленное / Смиряев А.В., Исачкин А.В., Панкина Л.К. – М.: Издательство РГАУ-МСХА, 2015. – 153 с.
11. Строгалев В.П., Толкачева И.О. Имитационное моделирование: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 280 с.