რიგების სისტემები დროის ექსპონენტური შეზღუდვით

რევაზ მიქაძე
სტუ-ს დოქტორანტი

რეზიუმე

წარმოდგენილ ნაშრომში განხილულია რიგების მრავალარხიანი სისტემა. ამ სისტემაში შესწავლილია შეტყობინებათა დაძველების ფაქტორის გავლენა ეფექტიანობის მაჩვენებელზე. სისტემაში შეტყობინებათა ყოფნის დროის შეზღუდვის საჭიროება გამომდინარეობს იქიდან, რომ ამ დროის გასვლის შემდეგ შეტყობინება იმდენად დაძველებულია, რომ მისი შემდგომი გამოყენება შეუძლებელია და ის ითვლება დაკარგულად. განსაზღვრულია სისტემის ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები სისტემის ფუნქციობის სტაციონარულ მდგომარეობაში.

საკვანძო სიტყვები: რიგების მრავალარხიანი სისტემა, სისტემაში შეტყობინების ყოფნის დრო, შეტყობინების დაძველება, შეტყობინების დაკარგვა.

QUEUING SYSTEMS WITH EXPONENTIAL RESTRICTION OF TIME

Revaz Mikadze
Doctoral candidate of GTU

SUMMARY

In this paper we discuss multichannel queueing system. The message ageing factor’s influence on efficiency index for this system is examined. Need for restriction of message sojourn time in the system is derived from the fact that after the pass of this time the message is so aged that its further use is impossible and it is considered as a lost. The main numerical characteristics of the system are determined in stationary condition.

ცნობილია, რომ თანამედროვე ინფოკომუნიკაციური და კომპიუტერული სისტემების მათემატიკური აღწერის ძირითადი აპარატია შემთხვევით პროცესთა თეორია და სახელდობრ, მარკოვულ პროცესთა თეორია. უმრავლეს შემთხვევებში ეს სისტემები განიხილებიან როგორც რიგების (მასობრივი მომსახურების) სისტემები. მათ საყურდლებო ნაირსახეობას წარმოადგენს ისეთი სისტემები, სადაც შეტყობინებათა ლოდინის ან სისტემაში ყოფნის დრო შემოსაზღვრულია. ეს გარემოება გამოწვეულია ინფორმაციის დაძველების ფაქტორით. სხვანაირად, ეს ნიშნავს, რომ გარკვეული დროის შემდეგ შეტყობინება ითვლება ისე დაძველებულად, რომ მისი შემდგომი გამოყენება შეუძლებელია და ის ითვლება დაკარგულად. ამ ნაშრომში სწორედ ასეთ შემთხვევას განვიხილავთ. ესაა M/M/n/N რიგების სისტემა [1].

მასობრივი მომსახურების მრავალარხიანი M/M/n/N ნიშნავს, რომ მომსახურების სისტემას აქვს n რაოდენობის არხი და N ადგილი შეტყობინებათა მოცდისთვის. დროის ყოველი მომენტისთვის სისტემაში მომსახურებას შეიძლება გადიოდეს არაუმეტეს n შეტყობინება და რიგში იცდიდეს არაუმეტეს N შეტყობინება. მაშასადამე, სისტემაში ერთდროულად შეიძლება იმყოფებოდეს არაუმეტეს n+N შეტყობინება. სისტემაში შედის შეტყობინებათა პუასონის ნაკადი λ ინტენსივობით, მომსახურება წარმოებს FIFO პრინციპით („პირველი მოვიდა - პირველი გავიდა“) („First In – First Out“). ვიგულისხმოთ, რომ მომსახურების დრო η ექსპონენციური შემთხვევითი სიდიდეა μ პარამეტრით. ამას გარდა, შეტყობინებების სისტემაში ყოფნის დროც ζ ექსპონენტური შემთხვევითი სიდიდეა υ პარამეტრით [1-3].

გამოსაკვლევი სისტემის ფუნქციობა ასე აღიწერება. შეტყობინება, რომელიც შემოდის სისტემაში, შეიძლება მაშინვე მიღებულ იქნას მომსახურებაზე, თუ მისი მოსვლის მომენტისთვის რომელიმე არხი თავისუფალია. თუ თავისუფალი არხი არ არის, მაგრამ არის თავისუფალი ადგილი რიგში მოცდისთვის, მაშინ შეტყობინება დგება რიგში. რიგიდან ის შეიძლება მოხვდეს მომსახურებაზე, თუ რაიმე მომენტში გათავისუფლდება რომელიმე არხი და ამ დროს მის წინ არ აღმოჩნდება სხვა შეტყობინება, ან დატოვოს სისტემა მომსახურების გარეშე, თუ რიგში მისი ლოდინის დრომ გადააჭარბა ζ-ს. ამ შემთხვევაში ის ითვლება დაკარგულად. დაკარგულია ის შეტყობინებებიც, რომლებიც მოვიდნენ იმ დროს, როცა სისტემაში უკვე იყო n+N შეტყობინება [2, 3].

ამ სისტემის მდგომარეობა სავსებით აღიწერება შემთხვევითი პროცესით $\upsilon(t)$, რაც გამოხატავს შეტყობინებათა რაოდენობას დროის t მომენტში. მდგომარეობათა სიმრავლეა E={0, 1, 2, …, n+N}. ადვილი მისახვედრია, რომ $\upsilon(t)$ არის „კვდომისა და გამრავლების“ პროცესი გადასვლათა შემდეგი ინტენსივობით:

$\Lambda_i=\Lambda, i<n+N$

$M_i=\begin{cases} i\mu, \text{თუ } 0 \le i \le n \\ n\mu + (i-n)\upsilon, n < i \le n+N \end{cases}$

ვთქვათ, $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$ და $\beta=\frac{\upsilon}{\mu}$, მაშინ $P_j=(\lambda_{j-1}/\mu_j)*P_{j-1}=\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda k\text{-}1}{\mu_j}$-დან და $P_0=[1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda k\text{-}1}{\mu_j}$-დან

მივიღებთ სტაციონარულ განაწილებას

$$\begin{cases} \dfrac{a^k/k!}{\sum_{m=0}^{n}\frac{a^m}{m!}+\left(\frac{a^n}{n!}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{\prod_{i=1}^{m}(n+i\beta)}}, & \text{თუ } k=0,n; \\ \dfrac{a^k/(n!\prod_{s=1}^{k-n}(n+s\beta))}{\sum_{m=0}^{n}\frac{a^m}{m!}+\frac{a^n}{n!}\sum_{m=1}^{N}\frac{a^m}{\prod_{m=1}^{m}(n+s\beta)}}, & \text{თუ } k=n+1,n+N \end{cases}$$

ამ გამოსახულებათა მიხედვით შესაძლებელია სისტემის ყველა სტაციონარული მახასიათებლის მიღება. რამდენადაც სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე სასრულია, სტაციონარული მდგომარეობა არსებობს პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

აღვნიშნოთ X-ით რიგში მყოფი შეტყობინებების რაოდენობა. ცხადია, რომ

$P\{x=s\}=\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} pk, \text{თუ } s=0 \\ Pn+s, \text{თუ } s=1,2,\ldots N \end{cases}$

ე.ი. მიღებულია რიგის სიგრძის განაწილება. ახლა შეგვიძლია რიგის სიგრძის მათემატიკური ლოდინის პოვნა

$Ex=\sum_{s=1}^{N} sPn+s.$

განვსაზღვროთ შეტყობინებათა დაკარგვის ალბათობა სტაციონალურ მდგომარეობაში. გავიხსენოთ, ეს არის ალბათობა იმისა, რომ შეტყობინება, რომელიც შემოდის სისტემაში დროის უსასრულოდ დაშორებულ მომენტში, დაიკარგება.

საძებნი ალბათობა ვიპოვოთ სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით. შემოვიტანოთ ხდომილებები A={შემოსული შეტყობინება დაიკარგება}.

A_k={შეტყობინებას სისტემაში დახვდება K შეტყობინება}, K=0, 1, ..., n+N, მაშინ $P(A)=\sum_{k=0}^{n+N}P(Ak)P\left(\frac{A}{AK}\right)=\sum_{k=n}^{n+N-1}PkP(Ak)P\left(\frac{A}{AK}\right)+P_{n+N}$,(1)

რადგან $P(A_k)=P_k$, $P(A/A_k)=0$, თუ $0\le K\le n-1$, $P(A/A_{n+N})=1$. ამრიგად, საჭიროა $P(A/A_k)$ პირობითი ალბათობების პოვნა, K=n, n+1, ..., n+N-1 [4-5].

აღვნიშნოთ $\eta_1^{(1)}$, $\eta_2^{(1)}$, ..., $\eta_n^{(1)}$-ითმომსახურებაში მყოფი შეტყობინებათა დარჩენილი მომსახურების ხანგრძლივობანი. ისინი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და თითოეული განაწილებულია μ პარამეტრიანი ექსპონენციური კანონით. აღვნიშნოთ $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, ..., $\xi_{k-n}^{(1)}$,რიგში მყოფი შეტყობინებების დარჩენილი ლოდინის ხანგრძლივობანი. ისინიც დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და თითოეული განაწილებულია υ პარამეტრიანი ექსპონენციური კანონით. შევნიშნოთ, რომ $\gamma_1=\min(\eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{k-n}^{(1)})$ დროის შემდეგ რიგიდან გავა ერთი შეტყობინება იმათგან, რომლებიც დახვდა ზემოთ სახელდებულ შეტყობინებას სისტემაში (ან შევა მომსახურების არხში, ან დატოვებს სისტემას რიგიდან ლოდინის დასაშვები დროის ამოწურვის გამო) და ამის შემდეგ სახელდებული შეტყობინებების წინ იქნება უკვე k-n-1 შეტყობინება. სტანდარტული ალბათური მსჯელობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ γ_1 განაწილებულია ექსპონენციური კანონით. ამ განაწილების პარამეტრია $\lambda_1^{(k)}=n\mu+(k-n)\upsilon$.

ანალოგიურად, $\gamma_2=\min(\eta_1^{(2)}, \ldots, \eta_n^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{k-n-1}^{(2)})$ დროის შემდეგ ერთი შეტყობინება დატოვებს რიგს. აქ $\eta_m^{(2)}$და $\xi_m^{(2)}$შემთხვევითი სიდიდეები განისაზღვრება ზემოთ აღნიშნული შემთხვევის ანალოგურად. მათი განაწილებებიც ისეთივეა, როგორც $\eta_m^{(1)}$და $\xi_m^{(1)}$ შემთხვევითი სიდიდეებისა. ასევე შემთხვევითი სიდიდე γ_2 განაწილებულია ექსპონენციური კანონით. ამ განაწილების პარამეტრია $\lambda_2^{(k)}=n\mu+(k-n-1)\upsilon$.

თუ გავაგრძელებთ ასეთ მსჯელობებს, მივიღებთ, რომ $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{k-n}$ დროის შემდეგ სახელდებული შეტყობინების წინ რიგში არ იქნება არცერთი შეტყობინება, ხოლო$\sigma=\gamma+\min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)=\sum_{i=1}^{k-n-1}\gamma i$ დროის შემდეგ ერთი არხი განთავისუფლდება და სახელდებული შეტყობინება მიღებული იქნება მომსახურებაზე. γ_iშემთხვევითი სიდიდეები ურთიერთდამოუკიდებლები არიან და განაწილებულნი არიან ექსპონენციური კანონით. განაწილების პარამეტრია $\lambda_i^{(k)}=n\mu+(k-n-i+1)\upsilon$; შემთხვევითი სიდიდე

$\min(\eta_1,\ldots,\eta_n)=\gamma_{k-n+1}$ განაწილებულია აგრეთვე ექსპონენციური კანონით და მისი პარამეტრია $\lambda=\lambda_{k-n+1}^{(k)}=n\mu$ [6-8].

σშემთხვევითი სიდიდის განაწილების პოვნა შეიძლება ლაპლასის პირდაპირი და უკუგარდაქმნის გამოყენებით. მივიღებთ σ-ს განაწილების სიმკვრივეს

$\varphi_\sigma(t)=\frac{\prod_{i=0}^{k-n}(n\mu+i\upsilon)}{(k-n)!\upsilon k-n}e^{n\mu t}(1-e^{-\upsilon t})^{k-n}$.

ამის შემდეგ მარტივია $P(A/A_k)$ პირობითი ალბათობების პოვნა. შეტყობინება დატოვებს რიგს, თუ შესრულდება პირობა $\zeta<\sigma$, ე.ი.$P(A/A_k)=P(\zeta<\sigma)=\int_0^\infty(1-e\hat{}(-vt)\varphi_\sigma(t)dt=\frac{(k-n+1)\upsilon}{n\mu+(k-n+1)\upsilon}$. (2)

თუ (2)-ს ჩავსვამთ (1)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ$P(A)=P_{n+N}+\frac{\beta}{\alpha}Ex$.

ანალოგიური მსჯელობების საფუძველზე მივიღებთ რიგში მიღებული შეტყობინებების ლოდინის ξ დროის განაწილები ფუნქციას

$P\{\xi<x\}=(1-e^{-\mu x})\frac{\sum_{k=0}^{n-1}Pk}{1-P\hat{}(n+N)}+\frac{1}{1\text{-}P\hat{}(n+N)}\sum_{k=n}^{n+N-1}Pk\int_0^x(1-e\hat{}(-m(x-t))X\frac{\prod_{i=0}^{k-n}(n\mu+i\upsilon)}{(k-n)!\upsilon\hat{}(k-n)}(1-e\hat{}(-\upsilon t)dt\ e\text{-}^{\mu nt}$.

ასევე მიიღება ბოლომდე მომსახურებული შეტყობინების სისტემაში ყოფნის ξ შემთხვევითი დროის განაწილების ფუნქცია

$P\{\xi<x\}=(1-e^{-\mu x})\frac{\sum_{k=0}^{n-1}Pk}{1-P\hat{}(n+N)}+\frac{1}{1\text{-}P\hat{}(n+N)}\sum_{k=n}^{n+N-1}Pk\int_0^x(1-e\hat{}(-m(x-t))X\frac{\prod_{i=0}^{k-n}(n\mu+i\upsilon)}{(k-n)!\upsilon\hat{}(k-n)}(1-e\hat{}(-\upsilon t))\hat{}(k-n)\ dt\ e\text{-}^{\mu nt}$.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულ რიგების სისტემაში ყველა საწყისი დროითი პარამეტრები (მომსახურების დრო, შეტყობინების სისტემაში ყოფნის დრო) ექსპონენტური კანონითაა განაწილებული. შემავალი ნაკადი არის პუასონის (უმარტივესი) ნაკადი. ასეთ პირობებში სისტემა აღიწერება „კვდომისა და გამრავლების" მარკოვული პროცესით. ნაშრომში მოძებნილია ამ პროცესის გადასვლათა ინტენსივობები და სხვა მახასიათებლები. მარკოვის პროცესთა თეორიისა და სხვა ალბათურ მსჯელობათა საფუძველზე მიღებულია სისტემის ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები.

ლიტერატურა

1. Leonard Kleinrock, Queueing systems, Volume 1: Theory, John Wiley & sons, New York, 1975
2. Limnios, N, Ionescu, D.C(Eds.), (1999), Statistical and Probabilistic Models in Reliability. Birkhäuser
3. Neal Allen Network Maintenance and Troubleshooting Guide (2010) Addison-Wesley Professional
4. J.W. Cohen, O.J. Boxma. Boundary Value Problems in Queueing system analysis, (1983) North Holland Pub. Co. New York, N.Y
5. Khairy Ahmed HelmyKobbacy, D. N. Prabhakar Murthy (Eds.),(2008), Complex System Maintenance Handbook.Springer-Verlag London
6. TorbenKuschel, (2017), Capacitated Planned Maintenance: Models, Optimization Algorithms,Combinatorial and Polyhedral Properties. Springer International Publishing
7. Mohamed Ben-Daya et al (Eds) (2009) Handbook of Maintenance Management and Engineering, Springer
8. J. Sztrik, O. Moller Simulation of Machine Interference in Randomly Changing Environments, Yugoslav Journal of Operations Research 12 (2002), Number 2.