

ეკონომიკური პროცესების მოდელირება

რაციონალური გამოსახულების ორიგინალის პოვნის ერთი მეთოდისა და მისი გამოყენების შესახებ

ბორის მასპინძელაშვილი
სტუ-ს პროფესორი

რეზიუმე

განხილულია ოპერაციულ აღრიცხვაში რაციონალური გამოსახულების ორიგინალის პოვნის ახალი მეთოდი. მოძებნილია $\frac{1}{p^2 + 2p + 5} \cdot \frac{1}{p^2 + 4}$ გამოსახულების ორიგინალი, ახალი მეთოდის გამოყენებით ამოხსნილია დიფერენციალური განტოლება.

საკვანძო სიტყვები: ოპერაციულ აღრიცხვა, ორიგინალი, დიფერენციალური განტოლება, რაციონალური გამოსახულება.

ABOUT THE METHOD OF FINDING ORIGINAL RATIONAL EXPRESSION AND ITS APPLICATION

Maspindzelashvili B.I.
Professor of GTU

Summary

The new method for Finding original of rational expression is being considered in the article. The original of the expression $\frac{1}{p^2 + 2p + 5} \cdot \frac{1}{p^2 + 4}$ is Found.

The differential equations are solved by applying the new method.

$f(t)$ ნამდვილი t ცვლადის ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა ეწოდება კომპლექსური p ცვლადის $F(p)$ ფუნქციას, რომელიც შემდეგი სახით განისაზღვრება:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

თუ ეს არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, მაშინ $F(p)$ -ს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციისა გამოსახულება, $f(t)$ -ს კი $F(p)$ -ს ორიგინალი.

თუ $F(p)$ გამოსახულების ორიგინალია $f(t)$, ეს სიმბოლურად ასე იწერება $F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t)$; როცა $f(t)$

ორიგინალის გამოსახულებაა $F(p)$, მაშინ იწერება $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$.

განვიხილოთ წესიერი რაციონალური გამოსახულება

$$F(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{(p - a_1)^{n_1} \dots (p - a_k)^{n_k} (a_1 p^2 + b_1 p + c_1)^{m_1} \dots (a_q p^2 + b_q p + c_q)^{m_q}}, \quad (1)$$

სადაც $b_j^2 - 4a_jc_j < 0, j = 1, 2, \dots, q$.

(1) გამოსახულების დაშლა $\frac{1}{(p-a)^k}, \frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))^n}, \frac{1}{(p-(\alpha-\beta i))^n}$ სახეების გამოსახულებათა

ჯამად, სადაც $\alpha + \beta i$ და $\alpha - \beta i$ არის $ap^2 + bp + c$ კვადრატული მრავალწევრების ფესვები, ხორციელდება შემდეგნაირად: გამოსახულებას დავშლით შესაკრებებად და გამოვიყენებთ შემდეგი სახის რაციონალური გამოსახულებების დაშლებს:

$$1. \frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}, 2. \frac{p}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))}.$$

1-ის დაშლა. მრიცხველს წარმოვადგენთ მნიშვნელის თანამამრავლების ისეთ კომბინაციად, რომ გაბათილდეს p -ს შემცველი წევრები, და მას დავშლით ორი უმარტივესი წილადის ჯამად, ე.ი.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))} &= \frac{p-(\alpha+\beta i)-(p-(\alpha-\beta i))}{-2\beta i(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))} = \\ &= \frac{-1}{-2\beta i(p-(\alpha-\beta i))} + \frac{1}{2\beta i(p-(\alpha+\beta i))}; \end{aligned}$$

2-ის დაშლა. p მრიცხველს წარმოვადგენთ მნიშვნელის თანამამრავლების ისეთ კომბინაციად, რომ გაბათილებული იქნას თავისუფალი წევრები, და მას დავშლით ორი უმარტივესი წილადის ჯამად, ე.ი.

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))} &= \frac{(\alpha-\beta i)(p-(\alpha+\beta i))-(\alpha+\beta i)(p-(\alpha-\beta i))}{-2\beta i(p-(\alpha+\beta i))(p-(\alpha-\beta i))} = \\ &= \frac{\alpha-\beta i}{-2\beta i(p-(\alpha-\beta i))} + \frac{\alpha+\beta i}{-2\beta i(p-(\alpha+\beta i))}. \end{aligned}$$

ზოგ შემთხვევაში შეიძლება საჭირო იყოს $F(p) = \frac{p^m}{(ap^2 + bp + c)^n}$ სახის რაციონალური

გამოსახულების დაშლა, სადაც $m < n, b^2 - 4ac < 0$.

$F(p)$ გამოსახულების ორიგინალი რომ ვიპოვოთ, p^m მრიცხველიდან გამოვყოთ p^2 თანამამრავლი და გამოსახულება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p^{m-2}(ap^2 + bp + c - bp - c)}{a(ap^2 + bp + c)^n} = \\ &= \frac{p^{m-2}}{a(ap^2 + bp + c)^n} - \frac{bp^{m-1}}{a(ap^2 + bp + c)^n} - \frac{cp^{m-2}}{a(ap^2 + bp + c)^n}. \end{aligned}$$

იმ შესაკრებათვის, რომელთა მრიცხველშიც p -ს ხარისხი ≥ 2 -ზე, ჩავატაროთ ანალოგიური გარდაქმნა, სანამ $F(p)$ გამოსახულება არ წარმოიდგინება $\frac{1}{(ap^2 + bp + c)^n}$ და $\frac{p}{(ap^2 + bp + c)^n}, n = 1, 2, \dots, n_1$, სახეების გამოსახულებათ ჯამად, ე.ი. m და n -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{p^m}{(ap^2 + bp + c)^n} = \frac{a_1}{ap^2 + bp + c} + \dots + \frac{a_{n_1}}{(ap^2 + bp + c)^{n_1}} +$$

$$+\frac{b_1 p}{ap^2+bp+c}+\dots+\frac{b_{n_1} p}{(ap^2+bp+c)^{n_1}}.$$

ამის შემდეგ უნდა დავშალოთ

$$\frac{1}{(ap^2+bp+c)^n} \text{ და } \frac{p}{(ap^2+bp+c)^n}, \quad n=1,2,\dots,n_1,$$

გამოსახულებები $\frac{1}{(p-(\alpha+\beta i))^k}$ და $\frac{1}{(p-(\alpha-\beta i))^k}$ სახეების უმარტივეს გამოსახულებათა ჯამად წინ მოყვანილი 1 და 2 დაშლების მსგავსად, ე.ი.

$$\frac{1}{(ap^2+bp+c)^n} = \left(\frac{-1}{2a\beta i(p-(\alpha-\beta i))} + \frac{1}{2a\beta i(p-(\alpha+\beta i))} \right)^n,$$

$$\frac{p}{(ap^2+bp+c)^n} = p \left(\frac{-1}{2a\beta i(p-(\alpha-\beta i))} + \frac{1}{2a\beta i(p-(\alpha+\beta i))} \right)^n;$$

უკანასკნელში საჭიროა $\frac{p}{(p-(\alpha \pm \beta i))^n}$ სახეების გამოსახულებების დაშლა. ე.ი.

$$\frac{p}{(p-(\alpha \pm \beta i))^n} = \frac{p-(\alpha \pm \beta i) + \alpha \pm \beta i}{(p-(\alpha \pm \beta i))^n} = \frac{1}{(p-(\alpha \pm \beta i))^{n-1}} + \frac{\alpha \pm \beta i}{(p-(\alpha \pm \beta i))^n}.$$

$F(p)$ გამოსახულების მიღებულ დაშლაში თითოეულ უმარტივეს გამოსახულებას შევცვლით თავისი ორიგინალით,

$$\frac{1}{(p-a)^{k+1}} \stackrel{\bullet}{=} \frac{t^k}{k!} e^{at}, \quad (1)$$

გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულებს $\frac{e^{\beta ti} + e^{-\beta ti}}{2} = \cos \beta t$, $\frac{e^{\beta ti} - e^{-\beta ti}}{2i} = \sin \beta t$ და მარტივი გარდაქმნებით

ვიპოვით $F(p)$ გამოსახულების ორიგინალს.

ვიპოვოთ რაციონალური გამოსახულების ორიგინალი.

მაგალითი 1. $F(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p^2+4)}.$

ამოხსნა. $F(p) = \frac{p^2+2p+5-(p^2+4)}{(2p+1)(p^2+2p+5)(p^2+4)} = \frac{1}{(2p+1)(p^2+4)} - \frac{1}{(2p+1)(p^2+2p+5)};$

$$\frac{1}{(2p+1)(p^2+4)} = \frac{4p^2-1-4(p^2+4)}{-17(2p+1)(p^2+4)} - \frac{2p-1}{-17(p^2+4)} + \frac{4}{17(2p+1)};$$

$$\frac{-1}{(2p+1)(p^2+2p+5)} = \frac{-1}{(2p+1)((p+1)^2+4)} = \left[\frac{p+1=x}{p=x-1} \right] = \frac{-1}{(2x-1)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{4x^2-1-4(x^2+4)}{17(2x-1)(x^2+4)} = \frac{2x+1}{17(x^2+4)} - \frac{4}{17(2x-1)} = \frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)} - \frac{4}{17(2p+1)};$$

$$F(p) = \frac{2p-1}{-17(p^2+4)} + \frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)};$$

$$\begin{aligned} \frac{2p-1}{-17(p^2+4)} &= \frac{2p}{-17(p+2i)(p-2i)} + \frac{1}{17(p+2i)(p-2i)} = \frac{p+2i+p-2i}{-17(p+2i)(p-2i)} + \\ &+ \frac{p+2i-(p-2i)}{68i(p+2i)(p-2i)} = \frac{-1}{17(p-2i)} - \frac{1}{17(p+2i)} + \frac{1}{68i(p-2i)} - \frac{1}{68i(p+2i)}; \\ \frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)} &= \frac{2p}{17(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))} + \frac{3}{17(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))} = \\ &= \frac{(-1+2i)(p-(-1-2i)) - (-1-2i)(p-(-1+2i))}{34i(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))} + \frac{3(p-(-1-2i)) - (p-(-1+2i))}{68i(p-(-1-2i))(p-(-1+2i))} = \\ &= \frac{-1+2i}{34i(p-(-1+2i))} + \frac{1+2i}{34i(p-(-1-2i))} + \frac{3}{68i(p-(-1+2i))} - \frac{3}{68i(p-(-1-2i))} = \\ &= \frac{1+4i}{68i(p-(-1+2i))} + \frac{-1+4i}{68i(p-(-1-2i))}. \end{aligned}$$

(1) ოპერაციული თანადარდობით და ეილერის ფორმულებით

$$\begin{aligned} \frac{2p-1}{-17(p^2+4)} &\doteq \frac{-1}{17}e^{2ti} - \frac{1}{17}e^{-2ti} + \frac{1}{68i}e^{2ti} - \frac{1}{68i}e^{-2ti} = \\ &= \frac{-2}{17} \frac{e^{2ti} + e^{-2ti}}{2} + \frac{1}{34} \frac{e^{2ti} - e^{-2ti}}{2i} = \frac{-2}{17} \cos 2t + \frac{1}{34} \sin 2t; \\ \frac{2p+3}{17((p+1)^2+4)} &\doteq \frac{1+4i}{68i}e^{(-1-2i)t} + \frac{-1+4i}{168i}e^{(-1-2i)t} = e^{-t} \left(\frac{e^{2ti} - e^{-2ti}}{68i} + \frac{e^{2ti} + e^{-2ti}}{17} \right) = \\ &= \frac{e^{-t}}{34} \sin 2t + \frac{2e^{-t}}{17} \cos 2t; \\ F(p) &\doteq \frac{-2}{17} \cos 2t + \frac{1}{34} \sin 2t + \frac{e^{-t}}{34} \sin 2t + \frac{2e^{-t}}{17} \cos 2t. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y'' - 8y' + 16y = \frac{1}{\cos 2t + e^{4t}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ამოხსნა. ვთქვათ განტოლების $y(t)$ ამონახსნი არის ორიგინალი, რომლის გამოსახულებაა $Y(p)$, ე.ი.

$y(t) \doteq Y(p)$. ორიგინალის წარმოებულისა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$y'(y) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p)$$

ვიპოვოთ მარჯვენა მხარის გამოსახულება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 2t + e^{4t}} &= \frac{1}{\frac{e^{2ti} + e^{-2ti}}{2} + e^{4t}} \stackrel{\cdot}{=} \left[\frac{t^k}{k!} e^{at} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{(p-a)^{k+1}} \right] \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-2i} + \frac{1}{p+2i} \right) + \frac{1}{p-4}} = \\ &= \frac{1}{\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{p-4}} = \frac{(p^2+4)(p-4)}{p^2-4p+4}, \end{aligned}$$

ოპერატორული განტოლება

$$p^2 Y(p) - 8pY(p) + 16Y(p) = \frac{(p^2+4)(p-4)}{2(p^2-2p+2)},$$

აქედან $Y(p) = \frac{p^2+4}{2(p^2-2p+2)(p-4)}$; ვიპოვოთ მისი ორიგინალი:

$$\begin{aligned} \frac{p^2-2p+2+2p+2}{2(p^2-2p+2)(p-4)} &= \frac{1}{2(p-4)} + \frac{p-4+5}{(p^2-2p+2)(p-4)} = \\ &= \frac{1}{2(p-4)} + \frac{1}{p^2-2p+2} + \frac{5}{(p^2-2p+2)(p-4)}; \\ \frac{1}{(p-1)^2+1} + \frac{5}{((p-1)^2+1)(p-4)} &= \left[\frac{p-1=x}{p=x+1} \right] = \frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{(x^2+1)(x-3)} = \\ &= \frac{x^2+1-(x^2-9)}{2(x^2+1)(x-3)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-3)} - \frac{x+3}{2(x^2+1)} = \\ &= \frac{-(x+i)-(x-i)}{4i(x+i)(x-i)} - \frac{x+i+x-i}{4(x+i)(x-i)} + \frac{1}{2(x-3)} = \\ &= \frac{-1}{4i(x-i)} + \frac{1}{4i(x+i)} - \frac{1}{4(x-i)} - \frac{1}{4(x+i)} + \frac{1}{2(x-3)} = \\ &= \frac{1+i}{4i(p-(1+i))} + \frac{1-i}{4i(p-(1-i))} + \frac{1}{2(p-4)}. \end{aligned}$$

(1) თანაფარდობის თანახმად

$$\begin{aligned} Y(p) &\stackrel{\cdot}{=} e^{4t} - \frac{1+i}{4i} e^{(1+i)t} + \frac{1-i}{4i} e^{(1-i)t} = e^{4t} + e^t \left(\left(\frac{1}{4i} - \frac{1}{4} \right) e^{-it} - \left(\frac{1}{4i} + \frac{1}{4} \right) e^{it} \right) = \\ &= e^{4t} + e^t \left(\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \right) = y(t). \end{aligned}$$

ლიტერატურა

1. Краснов М.Л. и др. Функции комплексного переменного, операционное исчисление. М., «Наука», 1971, 325 с.