

წარმოების ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირება. ლორენცის უცნაური ატრაქტორი

მაია შევარდენიძე
ეკონომიკის დოქტორი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თამაზ ობგაძე
ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია

რეზიუმე

ნაშრომში აგებულია წარმოებისა და პროდუქციის რეალიზაციის ერთიანი მათემატიკური მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ საწარმოო პროცესის დინამიკა. აგებული მათემატიკური მოდელისათვის შედგენილია შესაბამისი ალგორითმი და პროგრამა Mathcad პროგრამული პაკეტის ბაზაზე. ნაჩვენებია, რომ განმსაზღვრელი კოეფიციენტების შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის, სისტემა გადადის ლორენცის მოდელში უცნაური ატრაქტორისათვის, რაც ნათლად მოწმობს წარმოების ადაპტური მართვის აუცილებლობას.

საკვანძო სიტყვები: წარმოება; წარმოების მათემატიკური მოდელი; ლორენცის მოდელი.

MATHEMATICAL MODELING OF PRODUCTION ECONOMY. STRANGE LORENTZ ATTRACTOR

Maia Shevardenidze
Technical University of Georgia
Tamaz Obgadze
Tskhum-Abkhazia Academy of Sciences

RESUME

In the work, a unified mathematical model of production and sale of products is built, which allows to study the dynamics of the production process. For the constructed mathematical model, the corresponding algorithm and program based on the Mathcad software package have been compiled. It is shown that for the corresponding values of the determining coefficients, the system passes into the Lorentz model for a strange attractor, which clearly proves the necessity of adaptive management of production.

Keywords: Production; Mathematical model of production; Lorentz model.

1. წარმოების მათემატიკური მოდელი

ცნობილია, რომ წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია - პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

x - წარმოების მოცულობა;

y - რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა;

α - რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასი;

β - წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულება;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:
$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x \quad (1)$$

რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცულობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობათა სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

r - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების x მოცულობაზე;

γ - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი;

δ - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

z - წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას: $y = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z$. (2)

წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

b - რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტი;

l - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას: $z = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y$ (3)

ამრიგად, მივიღეთ საწარმოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} x = \alpha \cdot y - \beta \cdot x \\ y = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z \\ z = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y \end{cases} \quad (4)$$

2. ლორენცის მოდელი

ადვილად შევნიშნავთ, რომ (4) განტოლებები ემთხვევიან ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც წარმოიშვა მექანიკაში, როცა $\alpha=\beta=10$; $r=28$; $\gamma=\delta=l=1$; $b=\frac{8}{3}$. ვინაიდან ბუნებაში

სხვადასხვა პროცესებს შეესაბამება ერთიდაიგივე განტოლებათა სისტემა, ჩვენ გამოვიყენეთ ლორენცის მოდელი.

ამ შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ატრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ე.ი. პერიოდულად მეორდება სხვადასხვა მასშტაბებით. ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისაკენ. პარამეტრების შესაბამისი დინამიკის საშუალებით შესაძლებელია თავი ავარიდოთ სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს. ჩვენ ამოვხსენით ლორენცის განტოლებათა სისტემა ერთეულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10 \cdot y(t) - 10 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t) \cdot z(t) + 28 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) \cdot y(t) - \frac{8}{3} \cdot z(t)$$

ამრიგად, გამოვიკვლიეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორი ფაზურ სიბრტყეზე.

3. ლორენცის უცნაური ატრაქტორი

ატრაქტორი გამოხატავს მდგომარეობას, რომელშიც სისტემა საბოლოოდ მოხვდება. უცნაური ატრაქტორი - გარკვეული სახის ტრაექტორიას, რომელსაც სისტემა გაივლის სიტუაციიდან სიტუაციაში გადასვლისას. ჩვენს შემთხვევაში ეს არის წარმოების პროცესი.

ლორენცის განტოლებათა სისტემას ადვილად ამოვხსნით პროგრამა Mathcad-ზე [1-2], სადაც მას შეესაბამება მატრიცული ოპერატორი:

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} 10 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 + 28 \cdot Q_0 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} \cdot Q_2 \end{pmatrix}$$

Npts := 3000

$$L := \text{Rkadapt} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, \text{Npts}, D \right]$$

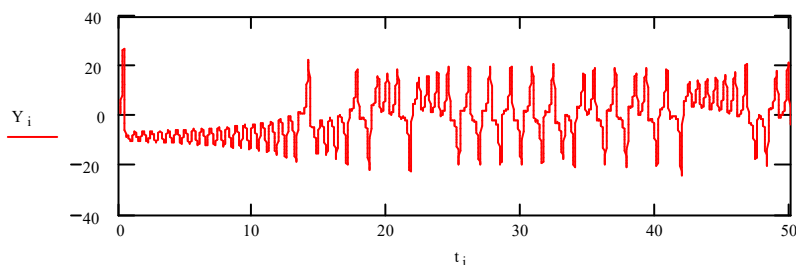
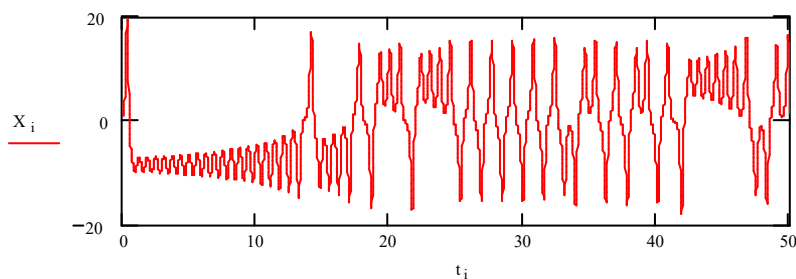
t := L^{<0>}

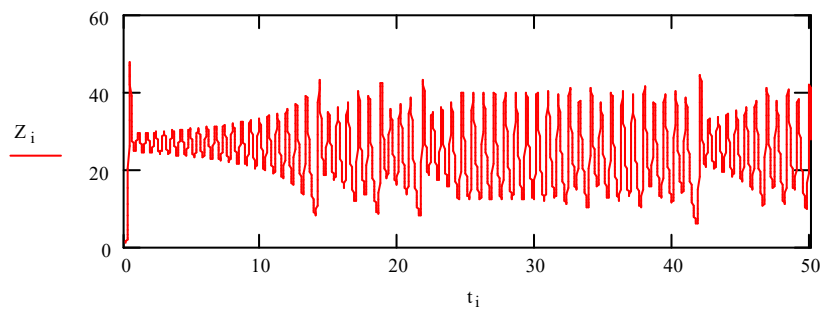
X := L^{<1>}

Y := L^{<2>}

Z := L^{<3>}

ამონახსნებს ვრეზულობთ გრაფიკების მეშვეობით: $i := 0.. \text{Npts}$





ავაგეთ დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე:

$\varepsilon := 0.001$

$R^{(0)} := X$

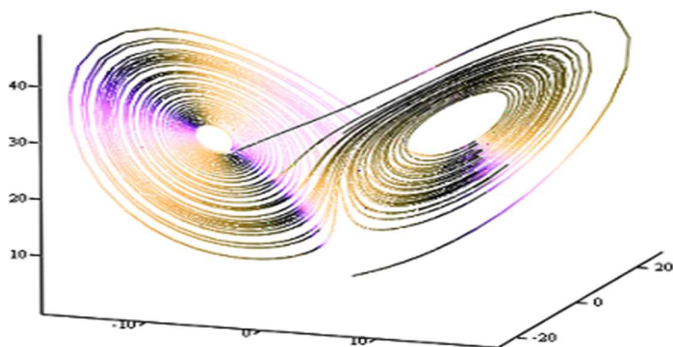
$R^{(1)} := X + \varepsilon$

$S^{(0)} := Y$

$S^{(1)} := Y + \varepsilon$

$T^{(0)} := Z$

$T^{(1)} := Z + \varepsilon$



სურათზე ვხედავთ, რომ სისტემის ასეთ განვითარებას და პროცესების ცვლილებების ტემპებს შეიძლება არაპროგნოზირებადი შედეგები მოჰყვეს. წარმოების ეკონომიკა მგრძნობიარეა ყველა ზემოქმედებაზე და პროცესის არასწორი მიმართულებით განვითარება გამოიწვევს სისტემის წონასწორობის რღვევას.

4. დასკვნა

მივიღეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათი, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის “პეპელას ფრთების” მოხაზულობას r -პარამეტრის ცვლილებისას. რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას, წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.

როგორც ვხედავთ, წარმოების სისტემა მართვის გარეშე შეიძლება ჩავარდეს ქაოსურ რეჟიმში და ადვილად განადგურდეს. აქედან გამომდინარე, ისეთ მიკრო-ეკონომიკურ სისტემასაც კი, როგორც ერთი სახის პროდუქტის სანარმოა, სჭირდება მუდმივი მართვა და კონტროლი. მთლიანად ბაზარს მინდობა არ მოგვცემს სათანადო შედეგს.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ა.ფრანგიშვილი, თ.ობგაძე, გ. ლავთაძე, მ.შევარდენიძე. ციკლები და ფრაქტალები საქართველოს მაკრო-ეკონომიკურ სისტემაში, საქართველოს ეკონომისტთა V ეროვნული სამეცნიერო კონფერენცია საქ. ეკონომიკის პოზიციონირება კონფრონტაციული გლობალიზაციის პირობებში, თბილისი, 2023.
2. თ.ობგაძე, ტ.კიკვაძე, მ.შევარდენიძე. ციკლები და ფრაქტალები სოციალურ-ეკონომიკურ სისტემებში, მონოგრაფია, სტუ, თბილისი, 2023.