

**წარწივი პროგრამირების ამოცანების
ოპტიმალური ამონახსნების მოძებნა
ეკონომიკურ-მათემატიკური
მოდელების გამოყენებით**

ოთარ შონია

ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სტუ პროფესორი

იოსებ ქართველიშვილი

ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სტუ ასოცირებული პროფესორი

ვაჟა ნადირაშვილი

საქართველოს არქიტექტორთა და მშენებელთა საენციკლოპედიო-საგამომცემლო ფონდის თავმჯდომარის პირველი მოადგილე

ლუკა შონია

სტუ სტუდენტი

ადამიანს ყოველდღიურ ცხოვრებაში აქვს შეხება პრობლემებთან, რომელიც დაკავშირებულია მოსალოდნელი შედეგების პროგრნოზირების შესაძლებლობის არარსებობასთან. რთული, მათ შორის ეკონომიკური ობიექტების (სისტემების) მართვის აუცილებლობამ გამოიწვია სპეციალური მეთოდების შექმნა, რომლებიც აადვილებენ სწორი გადაწყვეტილებების მიღებას. ეს მეთოდები დღესდღეობით ცნობილია „ოპერაციათა გამოკვლევის“ სახელწოდებით. თავიდან ამ მეთოდებს იყენებდნენ საბრძოლო ოპერაციებში გადაწყვეტილებების მიღებისა და მათი დასაბუთებისათვის. უკანასკნელი 60 წლის განმავლობაში ეს მეთოდები ინტენსიურად ვითარდება და გამოიყენება ადამიანის მოღვაწეობის ისეთ სფეროებში, როგორიცაა მრეწველობა, სოფლის მეურნეობა, ეკონომიკური გამოკვლევები, ტრანსპორტი, ჯანმრთელობის დაცვა, საყოფაცხოვრებო მომსახურება, ფსიქოლოგია და სხვა. ოპერაციათა გამოკვლევის ქვეშ იგულისხმება მათემატიკური რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენება, მიღებული გადაწყვეტილებების დასაფუძნებლად, ადამიანის მიზანმიმარ-

თული მოღვაწეობის იმ დარგებში, რომლებშიც არსებობს სხვადასხვა გზა მიზნის მისაღწევად. ოპერაციათა გამოკვლევის საგანი ეს არის მეცნიერული მეთოდების კომპლექსი მოწოდებული ორგანიზაციული სისტემების ეფექტურად მართვისათვის.

მოვიყვანოთ ოპერაციის რამოდენიმე მაგალითი: 1) სამრეწველო საწარმოს აინტერესებს საწარმოო რესურსების ეკონომიის საკითხი; 2) ახალ ავტოსტრადაზე უნდა განლაგდეს ავტოგასამართი სადგურების ქსელი, საჭიროა რაციონალურად განისაზღვროს ამ ქსელის პარამეტრები; 3) საქალაქო ტრანსპორტის სამსახურს აინტერესებს სატრანსპორტო საშუალებების ოპტიმალური მარშრუტები. ყველა მაგალითში ოპერაციის კვლევის ძირითადი ამოცანაა გარკვეული *მიზნის* მისაღწევად საუკეთესო გზის ამორჩევა და მისი შეფასება.

ოპერაციათა კვლევაში მთავარი როლი ენიჭება მათემატიკურ მოდელირებას. სანამ მათემატიკურ მოდელს ავაგებდეთ, საჭიროა ობიექტის (სისტემის) წინასწარი შესწავლის საფუძველზე გავავლინოთ ამ ობიექტის ისეთი მახასიათებლები, რომელთა მნიშვნელობების ვარირება შეიძლება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა დავადგინოთ მართვადი ცვლადების სიმრავლე. მათემატიკური მოდელის ასაგებად საჭიროა გვეკონდეს სწორი წარმოდგენა ობიექტის (სისტემის) ფუნქციონირების მიზანზე და ინფორმაცია შეზღუდვებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ მართვადი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებს. როგორც მიზანი, ასევე შეზღუდვები უნდა ჩაინეროს ფუნქციების სახით, რომელთა არგუმენტებს წარმოადგენენ მართვადი ცვლადები.

მათემატიკური მოდელები შეიძლება დავყოთ დეტერმინირებულ და სტოქასტურ მოდელებად. დეტერმინირებულ მოდელებში ყველა ფაქტორი, რომელიც ახასიათებს განსახილველ ობიექტს, მკვლევარისათვის ცნობილია. სტოქასტური მოდელები კი შეიცავენ შემთხვევით ფაქტორებს, რომელთა შესახებაც ცნობილია მათი განაწილების კანონები. ოპერაციათა გამოკვლევის პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დაგროვილი გამოცდილება საშუალებას იძლევა ამ ამოცანების შინაარსის მიხედვით გამოიყოს მათი ტიპობრივი კლასები. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

1. რესურსების განაწილების და დანიშვნის ამოცანები წარმოიშობა, როცა გვაქვს შესასრულებელ სამუშაოთა ერთობლიობა და მათ შესასრულებლად საჭირო რესურსები შემოსაზღვრულია (შეზღუდულია). ამოცანა მდგომარეობს სამუშაოების მიხედვით რესურსების ისეთი განაწილების მოძებნაში, რომლის დროსაც ან მინიმალური იქნება ოპერაციის ჩატარების დანახარჯები ან – მაქსიმალური საერთო ეფექტი. ორივე კრიტერიუმის ერთდროულად გათვალისწინებაც შესაძლებელია, მაგრამ ამ დროს მიიღება მათემატიკურად ზემოთ განხილულისგან თვისებრივად განსხვავებული ე.წ. მრავალკრიტერიუმიანი ოპერაციის ამოცანები. განაწილების ტიპის ამოცანებს ეკუთვნის სატრანსპორტო ამოცანა, რომელშიც განიხილება წარმოების პუნქტებზე მოხმარების პუნქტების ოპტიმალური მიმავლების პრობლემა. ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად ფართოდ გამოიყენება წრფივი პროგრამირების, გრაფთა თეორიის, განრიგებათა თეორიის მეთოდები.

2. მარაგთა მართვის ამოცანები ხასიათდება შემდეგი თავისებურებით: მარაგის ზრდასთან ერთად იზრდება მისი შენახვის ხარჯები, მაგრამ მცირდება დანაკარგები შესაძლო დეფიციტის გამო. საჭიროა დადგინდეს მარაგის ის რაოდენობა, რომელიც მიანიჭებს მინიმუმს მარაგის შენახვაზე საჭირო დანახარჯებისა და შესაძლო დეფიციტის გამო შექმნილი დანახარჯების ჯამს.

3. მოწყობილობათა რემონტისა და შეცვლის ამოცანები წარმოიშობა იმ დროს, როცა მოწყობილობა ცვდება, ძველდება და დროთა განმავლობაში შესაცვლელია. ამ დროს ისმის ამოცანა: განისაზღვროს პროფილაქტიკური ღონისძიებები ჩატარების ისეთი ვადა, რომლისთვისაც მაქსიმალური იქნება დანახარჯების ჯამი საკონტროლო სამუშაოების შესრულებაზე და მოწყობილობის შესაძლო გაჩერებით გამოწვეული დანაკარგებისა.

4. მარშრუტების ამორჩევის ამოცანები, ანუ ქსელური ამოცანები გვხვდება სატრანსპორტო და კავშირგაბმულობის სხვადასხვა პროცესების განხილვისას. ამ ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება კომივოიაჟერის, მაქსიმალური ნაკადის და გრაფთა თეორიის ზოგიერთი სხვა ამოცანა.

5. ქსელური დაგეგმვის ამოცანები აქტუალურია რთული და ძვირადღირებული პროექტების დამუშავებისას. ამ დროს არსებითია პროექტის სხვადასხვა ეტაპების დაწყებისა და დამთავრების ოპტიმალური დროის დადგენა.

6. მასობრივი მომსახურების ამოცანები შეისწავლიან მომსახურების სისტემებს რიგებით. რიგების წარმოქმნას ვხვდებით როგორც ყოფაში ასევე წარმოებაში და მათი წარმოქმნის მიზეზებია მოთხოვნათა ნაკადის არამართვადობა და შემთხვევითი ხასიათი. თუ მოწყობილობათა რაოდენობა დიდია (მაგალითად, ასაფრენ-დასაფრენი ზოლები აეროპორტში, კავშირგაბმულობის არხები და ა.შ.), მაშინ რიგი შეიქმნება იშვიათად, მაგრამ ადგილი ექნება მოწყობილობის მოცდენას. მეორე მხრივ, მათი მცირე რაოდენობისა იქმნება რიგები და დიდი დანაკარგები რიგში ლოდინის გამო. ამიტომ ისმის ამოცანა, როგორ განისაზღვროს მოწყობილობათა რაოდენობა, რომ მოვახდინოთ არათავისდროული მომსახურებისა და მოწყობილობის მოცდენისაგან გამონეული ჯამური დანაკარგების მინიმიზაცია.

7. დალაგების ამოცანები ანუ კალენდარული დაგეგმვის ამოცანებისათვის დამახასიათებელია სხვადასხვა ტიპის სამუშაოთა შესრულების ოპტიმალური თანმიმდევრობის დადგენა სხვადასხვა კრიტერიუმის შესაბამისად.

8. კომბინირებული ამოცანები ერთდროულად მოიცავენ რამდენიმე ტიპის ამოცანას. მაგალითად, წარმოების მართვის პროცესში ვაწყდებით შემდეგ პრობლემებს: თითოეული ტიპის რა რაოდენობის ნაკეთობა გამოვუშვათ (წარმოების დაგეგმვის ამოცანა), როგორ გავანაწილოთ შეკვეთები მოწყობილობებზე (განაწილების ამოცანა), რა თანმიმდევრობით შევასრულოთ შეკვეთები (კალენდარული დაგეგმვის ამოცანა).

პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობა გულისხმობს გარკვეული აზრით საუკეთესო (ოპტიმალური) გადაწყვეტილების (ალტერნატივის) ამორჩევას (მაგალითად, მოგების მაქსიმუმი, დანახარჯების მინიმუმი, გარკვეული ოპერაციის ჩატარებისათვის საჭირო დროის მინიმუმი და ა.შ.). შესაბამისი მათემატიკური მოდელებიც ძალიან ხშირად ოპტიმიზაციის ამოცანებია. ისეთ

ოპერაციებში, სადაც მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმს ვეძებთ და ცვლადები გარკვეულ პირობებს (შეზღუდვებს) აკმაყოფილებენ, ოპერაციათა კვლევის ამოცანების მოდელირებისათვის ძირითადად გამოიყენება მათემატიკური პროგრამირების მეთოდები.

მიზნობრივი ფუნქციისა და შეზღუდვების სტრუქტურის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური, დისკრეტული (მთელირიცხვა), სტოქასტური პროგრამირების ამოცანები. ოპტიმალური (თუ ეს შესაძლებელია) ან მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოიყენება ცნობილი ალგორითმები (თუ ასეთი არ არსებობს უნდა დამუშავდეს ახალი). როგორც წესი, პრაქტიკულ ამოცანებში ცვლადებისა და შეზღუდვების რიცხვი საკმაოდ დიდია, ამიტომ არსებითია კომპიუტერის როლი პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრაში. ამისათვის ხდება ალგორითმის კომპიუტერისათვის გასაგებ ენაზე გადატანა (დაპროგრამება).

მათემატიკური პროგრამირების ზემოჩამოთვლილი მეთოდებს შორის ყველაზე განვითარებულია და თითქმის საბოლოო სახე აქვს მიღებული წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს.

წრფივი პროგრამირების ამოცანები შეიძლება სხვადასხვა სახით დაისვას. მაგრამ ყველა ამოცანა, რომელზედაც დაიყვანება ნებისმიერი ეკონომიური ან ტექნიკური ამოცანა, შეიძლება გავაერთიანოთ წრფივი პროგრამირების ერთ ზოგად ამოცანაში. განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის მაგალითები და მათზე ავაგოთ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი:

1) **წარმოების დაგეგმვის ამოცანა.** პროდუქციის დასამზადებლად წარმოებას ესაჭიროება სხვადასხვა სახის ნედლეული: მასალა, ელექტროენერგია, სათბობი, მუშა ხელი და სხვა. ყველაფერს, რაც საჭიროა პროდუქციის დასამზადებლად ფუნდოთ რესურსი. წარმოებისათვის ცნობილია პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭირო რესურსების რაოდენობა. წარმოებისათვის აგრეთვე ცნობილია პროდუქციის ერთეულიდან მიღებული შემოსავალი. ცხადია, რომ ყოველ წარმოებას აქვს რესურსების განსაზღვრული რაოდენობა.

ასეთი წარმოების ოპტიმალური მართვის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: რამდენი დავამზადოთ თითოეული სახის პროდუქცია ისე, რომ არ გადავაჭარბოთ არსებულ რესურსებს და მივიღოთ მაქსიმალური შემოსავალი. დასმული ამოცანა დავიყვანოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე, შემოვიღოთ აღნიშვნები.

განვიხილოთ ნებისმიერი სახის წარმოება. დავუშვათ, რომ მოცემული წარმოება უშვებს n რაოდენობის პროდუქციას, რომლისთვისაც საჭიროა m რაოდენობის რესურსები. ამასთან ცნობილია თითოეული სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭირო რესურსების რაოდენობა, ე.ი. ნორმა, რომელიც აღვნიშნოთ a_{ij} -ით, სადაც $i=(1,..,m)$, $j=(1,..,n)$. მაგალითად, a_{12} – ეს არის ნორმა I სახის რესურსისა, რომელიც საჭიროა II სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად. ზოგადად a_{ij} – ეს არის ნორმა i -ური სახის რესურსისა, რომელიც საჭიროა j -ური სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად. c_j -ით აღვნიშნოთ j -ური სახის პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება, b_i – i -ური რესურსის რაოდენობა, რომელიც წარმოებას აქვს, x_j – პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც წარმოებამ უნდა დაამზადოს. მაშინ $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ იქნება წარმოების მთლიანი გეგმა.

ცხადია, რომ წარმოებას სურს შეადგინოს ისეთი გეგმა, რომელიც მოცემული რესურსების გამოყენებით მას მისცემს მაქსიმალურ მოგებას, ე.ი. უნდა განვსაზღვროთ ეფექტურობის კრიტერიუმი ან მოცემული ამოცანის მიზნობრივი ფუნქცია.

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად ცნობილია c_j , მაშინ $c_j x_j$ იქნება x_j რაოდენობის I სახის პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება. ასევე $c_n x_n$ არის x_n რაოდენობის n -ური სახის პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება. თუ შევკრიბავთ $c_j x_j$, მივიღებთ F მიზნობრივ ფუნქციას, ანუ ეფექტურობის კრიტერიუმს.

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_j x_j + ... + c_n x_n \text{ ანუ } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

წარმოებას აინტერესებს ისეთი $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ გეგმის შედგენა, რომ ერთის მხრივ (1)-მა მიზნობრივმა ფუნქციამ მიიღოს მაქსი-

წრფივი, ამიტომ მოცემული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანას. (4) შეზღუდვების სისტემა და (5) მიზნობრივი ფუნქცია წარმოადგენს ამოცანის მათემატიკურ მოდელს.

2. დიეტის ამოცანა. განვიხილოთ ეკონომიური (იაფი) რაციონის შედგენის ამოცანა, რომელიც წარმოიშობა ადამიანთა დიდი ჯგუფების (არმია, სანატორიუმი და ა.შ.) კვების უზრუნველყოფის პროცესში. ცნობილია, რომ ადამიანს რომ არ განუვითარდეს დავადებები, მან დროის გარკვეულ (განსახილველ) პერიოდში უნდა მიიღოს გარკვეული ნივთიერებების (ცხიმები, ცილები, ნახშირწყლები და ა.შ.) აუცილებელი რაოდენობა. ეს ნივთიერებები მას მიეწოდება პროდუქტების (პური, კარტოფილი, შაქარი, ხორცი და ა.შ.) სახით. ცნობილია თითოეული ნივთიერების შემცველობა ყოველ პროდუქტში, ნივთიერებების აუცილებელი რაოდენობა და ერთეული პროდუქტის ფასი. ისმის ამოცანა: დავადგინოთ კვების ისეთი რაციონი, რომელიც უზრუნველყოფს ნივთიერებების აუცილებელი რაოდენობით მიღებას და პროდუქტების შეძენაზე განეული ხარჯები იქნება მინიმალური.

ვთქვათ, პროდუქტების რაოდენობაა n , ნივთიერებების i – m . i -ური ნივთიერების აუცილებელი რაოდენობაა $b_i, i=1, \dots, m$, j -ური პროდუქტის ერთეულის ფასი $c_j, j=1, \dots, n$, j -ურ პროდუქტში i -ური ნივთიერების შემცველობაა $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$. $x_j, j=1, \dots, n$, იყოს j -ური პროდუქტის რაოდენობა, რომელიც უნდა შევიდეს რაციონში. x_j რაოდენობის j -ური პროდუქტის შეძენაზე დახარჯული თანხა იქნება $c_j x_j$. ამიტომ საერთო დანახარჯების მინიმუმი (მიზნის ფუნქცია) ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (6)$$

i -ური ნივთიერების შემცველობა რაციონში იქნება $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, ამიტომ ამოცანის პირობის შესრულებას უზრუნველყოფს უტოლობათა სისტემა (შეზღუდვები):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

რასაც უნდა დავამატოთ ცვლადების არაუარყოფითობის $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ პირობა.

წრფივი პროგრამირების ამოცანებში მათემატიკური მოდელის აგების შემდეგ მოიძებნება ოპტიმალური ამოაწხსნები, რომლისთვისაც გამოიყენება სიმპლექს-მეთოდი.

საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ეკონომიკური პრო-

ცესების რაოდენობრივ მახასიათებლების შესწავლა დაფუძნებულია ეკონომიკურ-მათემატიკურ მეთოდებსა და მოდელებზე. ეკონომიკური ობიექტის მათემატიკური მოდელის შექმნის პროცესი გვაძლევს ეკონომიკური ანალიზის საშუალებას წარმოების პროცესში, რათა უფრო ეფექტური გადაწყვეტილებები მივიღოთ. მაშასადამე, წარმოების მართვის პროცესში ეფექტური გადაწყვეტილებების მისაღებად და დაგეგმვისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ ობიექტის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი, რომელიც განსაზღვრავს ეკონომიკური ობიექტის არსს, ანუ ეკონომიკური ამოცანა წარმოდგენილ უნდა იყოს მათემატიკური განტოლებების, უტოლობებისა და ზღვრული ფუნქციის ექსტრემუმის (მაქსიმუმი ან მინიმუმი) სახით, სადაც ყველა პირობა იქნება დაცული თავისი ცვლადებითა და შეზღუდვებით.

ნებისმიერი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის შინაარსში გამოხატულია ფორმალურ-მათემატიკური დამოკიდებულება, რომელიც შეესატყვისება მისი ეკონომიკური პრობლემების არსს და მიზანს. ამ მოდელში მათემატიკური კავშირებით ასახულია ეკონომიკური ღირებულებები. ეკონომიკური პირობების აღწერა მათემატიკური გამოთვლებით შედეგია იმისა, რომ აღნიშნული მოდელის შედეგობრივი არსი კავშირშია ეკონომიკურ პარამეტრებთან ან სიდიდეებთან. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის აგების არსს წარმოადგენს ეკონომიკური ამოცანების მათემატიკური გამოსახვა, რისთვისაც გამოიყენება სხვადასხვა სახის სიმბოლოები, ცვლადები, მუდმივი ფუნქციები და სხვა. ამოცანის ყველა პირობა სავალდებულოა გამოისახოს განტოლების ან უტოლობის სახით.

ამგვარად, ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად, ნებისმიერი ეკონომიკური ამოცანისათვის, აუცილებელია აიგოს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი ისეთი სტრუქტურით, რომელიც მოიცავს შეზღუდვების სიტემებს, მიზნობრივ ფუნქციას და ოპტიმალურობის კრიტერიუმებს.

ლიტერატურა

1. გოგიჩაიშვილი გ., შონია ო., ქართველიშვილი ი. ოპერაციათა კვლევა. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 1998 წ.
2. გოგიჩაიშვილი გ., შონია ო., ქართველიშვილი ი. ავტომატიზებული მართვის მოდელები. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 2004 წ.

**FINDING THE OPTIMAL RECTILINEAR PROGRAMMING
TASK SOLUTIONS BY APPLYING THE ECONOMIC-
MATHEMATICAL MODELING**

Shonia Otar, Doctor of Technical Sciences, GTU Professor

Qartvelishvili Ioseb, Candidate of Technical Sciences,
GTU Associate Professor

Nadirashvili Vajha, The Encyclopedia-Publishing Fund of Georgian Architects and Civil Engineers, First Deputy Chairman

Shonia Luka, GTU Student

Resume

The need for management of economic sites has caused the creation of the special methods that ease the proper decision making. These methods are being intensively developed and purposely applied in many fields of human activities. While processing such methods key role stands behind the mathematical modeling.

Most of the practical tasks somewhat imply finding an optimal solution. The relevant mathematical models are quite often the optimization tasks. In operations where we are looking for an extremum of multiple variable function and where variables meet certain conditions, for task

modeling mathematical programming methods are mainly used, that split in following types: rectilinear, non- rectilinear, dynamic, discrete, stochastic and heuristic programming. Most developed and almost final among the above mentioned programming methods are the rectilinear programming task solution methods that may be put in various ways. However, all of the tasks to any of economic or technical tasks, can be interpreted into one general rectilinear programming task. For effective decision making and planning in production management process we need to use economic-mathematical model that defines the core of the economic site, i.e. economic task should be displayed as mathematical equation, inequality and limit function extremum, where all conditions are in relevance with their variables and limits. Thus, in order to find optimal solutions for any economic task we need to design economic – mathematical model with the structure that involves limitation systems, criterion function and optimality criteria.